

Timár Imre

MŰSZAKI MECHANIKA II.
SZILÁRDSÁGTAN

Veszprémi Egyetemi Kiadó
Veszprém, 2003

A könyv az Oktatási Minisztérium támogatásával, a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított felsőoktatási tankönyvtámogatási program keretében jelent meg.



Oktatási
Minisztérium

ISBN 963 9495 21 2

Kiadja a Veszprémi Egyetemi Kiadó
8200 Veszprém, Egyetem u. 10. Pf.: 158.
Telefon/fax: 88/422-022/4133
E-mail: kiado@almos.vein.hu
Honlap: <http://www.vein.hu/kiado>
Felelős kiadó: Egyházy Tiborné dr.

Borító: Pfitzner Zoltán

Készült az OOK-Press Kft. nyomdájában,
8200 Veszprém, Csillag u. 5.
18 ív (A5) terjedelemben
Felelős vezető: Szathmáry Attila

VE 21/2003

TARTALOMJEGYZÉK

1. A FESZÜLTSEGEK ÉS ALAKVÁLTOZÁSOK ELMÉLETE	7
1.1. A SZILÁRDSÁGTAN ALAPFOGALMAI, FELADATA	7
1.2. A FESZÜLTSEG FOGALMA, A FESZÜLTSEGI ÁLLAPOT.....	8
1.3. A CSÚSZTATÓ FESZÜLTSEGEK DUALITÁSA.....	11
1.4. A FESZÜLTSEGVEKTOR KOMPONENSEINEK MEGHATÁROZÁSA.....	13
1.5. A FESZÜLTSEGI ÁLLAPOT MOHR-FÉLE ÁBRÁZOLÁSA.....	15
1.6. A SÍKBELI FESZÜLTSEGI ÁLLAPOT.....	18
1.7. AZ ALAKVÁLTOZÁSI ÁLLAPOT.....	21
1.8. A SZAKÍTÓVIZSGÁLAT ÉS A SZAKÍTÓDIAGRAM	24
1.9. A MEGENGEDETT FESZÜLTSEG ÉS AZ ANYAGMODELLEK	29
2. EGYSZERŰ IGÉNYBEVÉTELEK	33
2.1. KÖZPONTOS HÚZÁS ÉS NYOMÁS	33
2.1.1. Feszültségek és alakváltozások	33
2.1.2. A hirtelen keresztmetszet-változás okozta feszültségeloszlás.....	37
2.1.3. Az egyenszilárdságú húzott rúd	39
2.1.4. A felületi és palástnyomás	41
2.1.5. A hőmérsékletváltozás okozta feszültségek.....	42
2.2. A NYÍRÁS.....	43
2.3. A HAJLÍTÁS.....	46
2.3.1. A hajlításból származó feszültségek meghatározása.....	46
2.3.2. A hajlított rúd alakváltozása	52
2.3.3. A rugalmas szál differenciálegyenlete	53
2.3.3.1. A befogott tartó alakváltozásainak meghatározása	55
2.3.3.2. A kéttámaszú tartó alakváltozásainak meghatározása.....	56
2.3.4. Változó keresztmetszetű hajlított tartók.....	58
2.3.4.1. Állandó vastagságú, koncentrált erővel terhelt konzolos tartó.....	59
2.3.4.2. Állandó szélességű, koncentrált erővel terhelt konzolos tartó.....	60
2.4. A CSAVARÁS.....	62
2.4.1. A kör és körgyűrű keresztmetszetű egyenes rudak csavarása	62
2.4.2. Vékony falú csövek csavarása	67
3. A KIHAJLÁS	71
3.1. KARCSÚ, KÖZPONTOSAN NYOMOTT RUDAK KIHAJLÁSA.....	71
4. EGYIRÁNYÚ ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEK	79
4.1. HÚZÁS ÉS HAJLÍTÁS	79
4.2. NYOMÁS ÉS HAJLÍTÁS	82
4.3. A KERESZTMETSZET BELSŐ MAGIDOMA.....	84
4.4. A FERDE HAJLÍTÁS	88

5. TÖBBIRÁNYÚ ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEK	93
5.1. A MOHR-ELMÉLET.....	94
5.2. A HUBER-MISES-HENCKY ELMÉLET.....	96
5.3. A MOHR- ÉS A HMH-ELMÉLET ÖSSZEHASONLÍTÁSA	97
5.4. RÚDSZERKEZETEK MÉRETEZÉSÉNEK ÁTTEKINTÉSE	101
5.5. A HAJLÍTÁSSAL PÁROSULT NYÍRÁS	104
6. A SZILÁRDSÁGTAN MUNKATÉTELEI	113
6.1. AZ ALAKVÁLTOZÁS MUNKÁJA	113
6.2. A BELSŐ ENERGIA SZÁMÍTÁSA RÚD ALAKÚ TESTEKNÉL.....	116
6.3. BETTI-TÉTELE.....	119
6.4. BETTI-TÉTELÉNEK ALKALMAZÁSA	122
6.5. CASTIGLIANO-TÉTELE.....	125
6.6. CASTIGLIANO-TÉTELÉNEK ALKALMAZÁSA	128
6.6. MAXWELL-FELCSERÉLHETŐSÉGI TÉTELE.....	130
6.7. STATIKAILAG HATÁROZATLAN RÚDSZERKEZETEK SZÁMÍTÁSA.....	131
7. VASTAG FALU CSÖVEK.....	135
8. KIDOLGOZOTT FELADATOK	149
8.1. A FESZÜLTSGÉI ÁLLAPOT MOHR-FÉLE ÁBRÁZOLÁSA.....	149
8.2. HÚZÁS	152
8.3. TISZTA NYÍRÁS	156
8.4. HAJLÍTÁS	158
8.5. A RUGALMAS SZÁL DIFFERENCIÁLEGYENLETE	161
8.6. CSAVARÁS.....	165
8.7. KÖZPONTOSAN NYOMOTT RÚD KIHAJLÁSA	168
8.8. HAJLÍTÁSSAL PÁROSULT NYÍRÁS	171
8.9. TÖRTVONALÚ TARTÓ MÉRETEZÉSE.....	174
8.10. TÁRCSÁS TENGELY MÉRETEZÉSE	178
8.11. BELSŐ ENERGIA SZÁMÍTÁSA	183
8.12. STATIKAILAG HATÁROZATLAN KERETSZERKEZET MÉRETEZÉSE	186
8.13. VASTAG FALÚ CSŐ.....	191
IRODALOMJEGYZÉK	195
TÁRGYMUTATÓ.....	197

1. A FESZÜLTSEGEK ÉS ALAKVÁLTOZÁSOK ELMÉLETE

1.1. A szilárdságtan alapfogalmai, feladata

A statikában az erőrendszer hatásának kitett testet tökéletesen merevnek tételeztük fel, tehát olyanak, hogy alakját a terhelések hatására nem változtatja meg. Gyakorlati tapasztalatainkból azonban tudjuk, hogy a testek a külső erők hatására kisebb-nagyobb mértékben alakváltozást szenvednek. Ez az alakváltozás többnyire kicsi. A merev test után tehát eljutunk a *szilárd test* fogalmához, amely a külső terhelés hatására alakját és méreteit kismértékben megváltoztatja. Amennyiben a szilárd test az erők eltávolítása után visszanyeri eredeti alakját, méreteit akkor *rugalmas testtel* állunk szemben, ellenkező esetben viszont *képlékeny* testről van szó. A teherviselő szerkezetek anyagai egy részének a rugalmas tulajdonságok mellett számottevőek a képlékeny tulajdonságai is. Az ilyen anyagot *rugalmas-képlékenynek* nevezzük.

Szilárdságtani vizsgálataink megkönnyítése céljából feltételezzük, hogy a test anyaga

- *homogén*, vagyis a test anyagának tulajdonságait leíró mennyiségek (például a rugalmassági modulusz) a test minden pontjában azonos értékűek;
- *izotróp*, vagyis a test mechanikai viselkedése tekintetében nincsenek a testben a test anyagi-szerkezeti felépítettségéből következő, kitüntetett irányok.

A folytonos tömegeloszlású testet *kontinuumnak* nevezzük.

A szilárd testekre ható külső erőrendszerek egyensúlyi erőrendszert alkotnak, amelyekről feltételezzük, hogy az alakváltozás során is *egyensúlyi erőrendszerek* maradnak, így a statika egyensúlyi feltételei szilárd testekre is alkalmazhatók. A szilárdságtanban a statika alaptörvényei azonban csak korlátozott érvényűek, például egy erőrendszer csak akkor helyettesíthető az eredőjével, ha a szilárd testen azonos alakváltozást hoz létre.

A szilárdságtan rendszerint a vizsgált testek geometriai alakjából következő egyszerűsítő feltételekkel is él. Ebben a tekintetben beszélhetünk, például rudak szilárdságtanáról, lemezek szilárdságtanáról stb., ahol a sajátos geometriai alak lehetőséget nyújt egyszerűsítő feltételek bevezetésére.

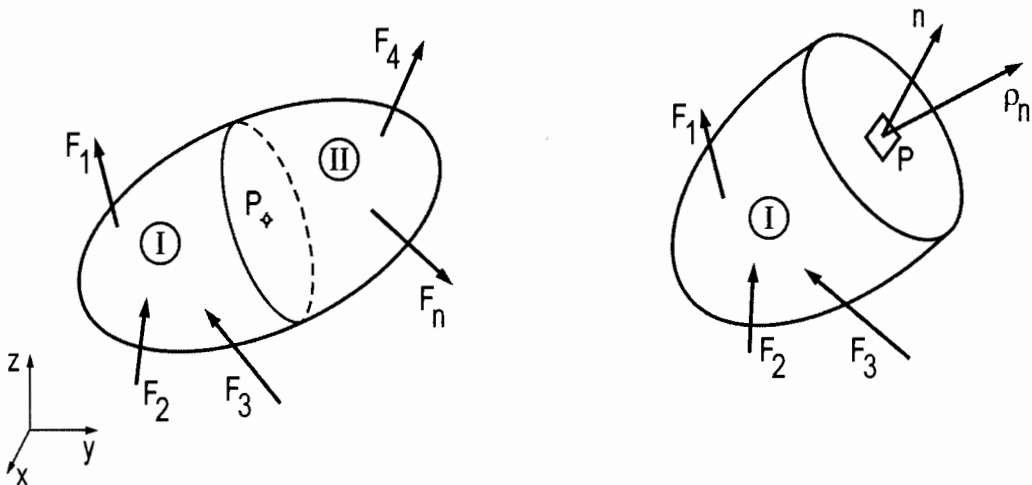
A *szilárdságtan feladata* választ adni arra a kérdésre, hogy valamely szilárd testben a terhelő külső erőrendszer hatására milyen belső erők ébrednek és milyen alakváltozások jönnek létre. Szilárdságtani vizsgálataink során feltételezzük, hogy az alakváltozások kicsik.

1.2. A feszültség fogalma, a feszültségi állapot

A továbbiakban vizsgáljunk meg egy tetszés szerinti alakkal rendelkező szilárd testet, amelyre az $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n$ külső erőkből álló egyensúlyi erőrendszer hat (1. ábra). Amennyiben a testet kényszerek rögzítik, akkor e kényszerek reakcióerői szintén beletartoznak ebbe a külső erőrendszerbe.

A terhelés hatására a test belsejében is erők ébrednek, melyek vizsgálatához gondolatban vágjuk ketté a testet (esetünkben egy síkkal), majd távolítsuk el az egyik részt. Az igénybevétel fogalmának tisztázásakor láttuk, hogy a test csak akkor marad egyensúlyban, hogyha az elvágással megszüntetett anyagi összefüggés helyén működtetjük a belső erőket. Tételezzük fel, hogy az átmetsző sík tartalmazza a P pontot, akkor ebben az esetben a P pontban a megoszló erőrendszer intenzitásvektora

$$\overline{\rho} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \overline{F}}{\Delta A} = \frac{d\overline{F}}{dA}.$$



1. ábra

A feszültségi állapot értelmezése

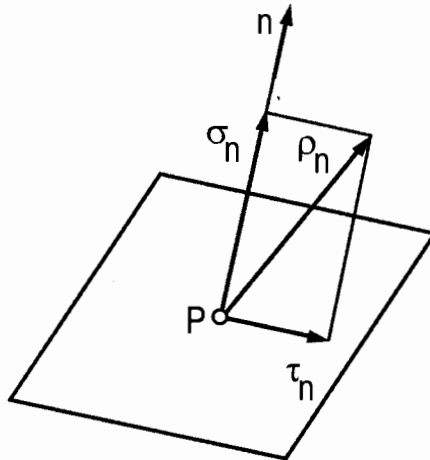
Az így kapott mennyiséget, vagyis a felületegységre jutó belső erők határértékét feszültségnek nevezzük, mértékegysége: $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$. Az egység Pascal (1623–1662) francia matematikus nevét őrzi. A műszaki gyakorlatban ennek többszöröse használatosak: kPa; MPa.

Az 1. ábrán látható szilárd test P pontjában értelmezzük a metszési síkra merőleges \bar{n} normálvektort. Általános esetben a síkhoz tartozó $\bar{\rho}_n$ feszültségvektor szöget zár be a normálissal (2. ábra). Amennyiben képezzük a $\bar{\rho}_n$ feszültségvektornak a normális irányú vetületét, megkapjuk a metszési síkra merőleges $\bar{\sigma}_n$ feszültséget, amit normálfeszültségnek (húzó vagy nyomó) nevezünk. A $\bar{\rho}_n$ feszültségvektor síkba eső (\bar{n} -re merőleges) vetülete pedig megadja a tangenciális (nyíró) igénybevételt, a $\bar{\tau}_n$ -t.

A feszültségvektor nagyságát az összetevők nagyságának ismeretében a

$$\rho = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2}$$

alapján számítjuk.



2. ábra

A feszültségvektor összetevői

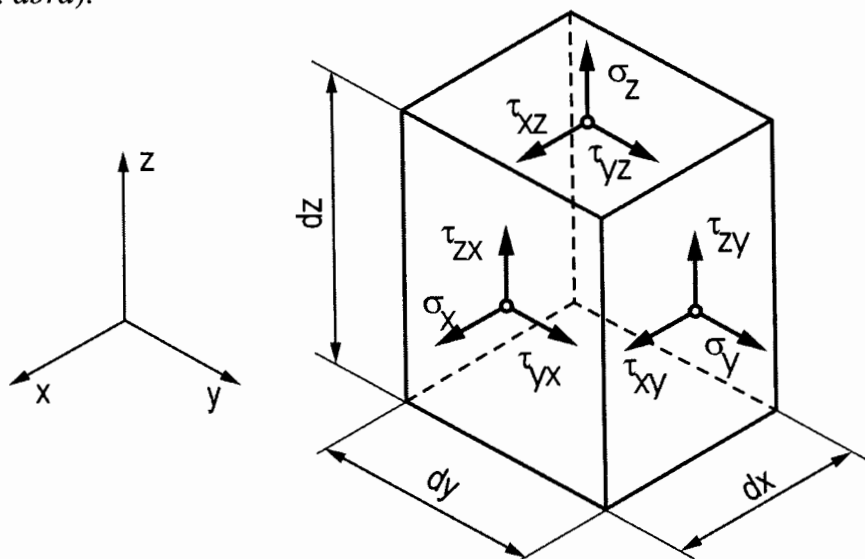
A továbbiakban vizsgáljuk meg, hogy miként változik a $\overline{\rho}_n$ feszültségvektor értéke valamely P pontban. A szemlélet alapján beláthatjuk, hogy egy P ponton át végtelen sok metszősík halad keresztül, melynek mindegyikéhez tartozik egy belső erő, illetve feszültség. Az átmetsző síkot egyértelműen helyettesíthetjük a rá merőleges normális \overline{n} vektorral. Ennek alapján elmondhatjuk, hogy minden egyes \overline{n} normális irányú vektorhoz tartozik egy $\overline{\rho}_n$ feszültségvektor, vagyis a feszültségvektor a normálvektor függvénye $\overline{\rho}_n = \overline{\rho}_n(\overline{n})$.

A feszültségek összességét röviden feszültségi állapotnak nevezzük. Tehát arra az eredményre jutottunk, hogy a vizsgált test egy pontjában a ponton átmenő összes síkelemhez tartozó feszültségvektor együttesen meghatározza a pont *feszültségi állapotát*.

Amennyiben a vizsgált test valamely P pontjában ismerjük az összes átmetsző síkhoz tartozó feszültségvektort, akkor elmondhatjuk, hogy ismerjük a feszültségi állapotot. A továbbiakban beláthatjuk, *ha a vizsgált P pontban, három egymásra merőleges síkban ismerjük a feszültségeket, akkor a feszültségi állapot meghatározott*. E három síkot határozza meg esetünkben az xyz derékszögű koordinátarendszer.

1.3. A csúsztató feszültségek dualitása

Vágjunk ki a test P pontjának környezetéből egy dx , dy , dz oldalhosszúságú elemi hasábot, melynek oldalai párhuzamosak a koordináta-rendszer tengelyeivel (3. ábra).

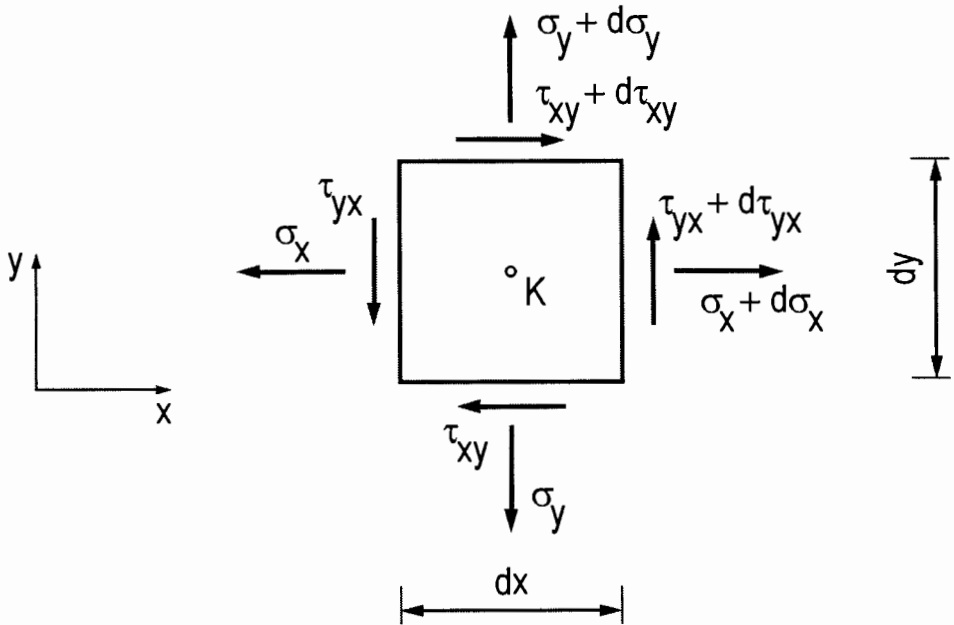


3. ábra

Feszültségkomponensek

A hasáb lapjaira merőleges összetevők megadják a normál-feszültségeket (σ_x , σ_y , σ_z), a lapokba eső komponensek pedig a csúsztatófeszültségeket (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy}). A csúsztatófeszültségek első indexe megadja, hogy melyik irányba mutatnak, másik indexe pedig azt, hogy melyik normális síkon ébrednek (például τ_{xy} az x-tengely irányába mutat és az y-tengelynek megfelelő normális síkon ébred). A feszültség értéke pozitív, ha a tengely irányába mutat.

Rajzoljuk fel a 3. ábrán látható hasáb képét úgy, hogy a z-tengely irányából nézünk rá. Az elemi hasáb egyensúlyából következik, hogy az x-y síkban a párhuzamos hasáboldalakon ébredő feszültségek ellentétes értelműek és közel egyenlő nagyságúak (4. ábra).



4. ábra

A csúsztató feszültségek dualitása

A tanultak értelmében nemcsak a megfelelő irányú feszültségekre, hanem a négyzet K középpontján áthaladó, a z-tengellyel párhuzamos tengelyre is fenn kell állni az egyensúlynak

$$(\tau_{xy} + d\tau_{xy})dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{xy} dx dz \frac{dy}{2} - (\tau_{yx} + d\tau_{yx})dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dy dz \frac{dx}{2} = 0.$$

Egyszerűsítsünk $(dx dy dz/2)$ -vel és rendezzük az egyenletet

$$2\tau_{xy} + d\tau_{xy} = 2\tau_{yx} + d\tau_{yx}.$$

Ezután a $d\tau_{xy}$ -t és a $d\tau_{yx}$ -t a τ_{xy} és a τ_{yx} mellett elhanyagoljuk és az eredményt kettővel osztva kapjuk, hogy

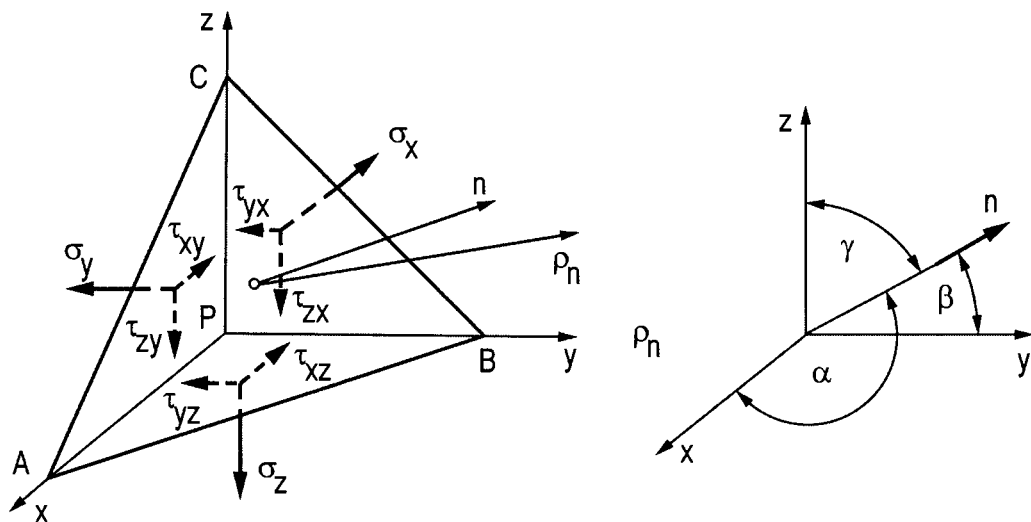
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Ez az összefüggés a csúsztató feszültségek dualitásának tétele. Hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$\tau_{yz} = \tau_{zy},$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

A dualitás tétele azt fejezi ki, hogy két egymásra merőleges síkpárban ébredő csúsztató feszültségek a síkok metszéspontja felé, vagy attól ellentétesen mutatnak és egyenlő nagyságúak.



5. ábra

A tetraéder feszültségkomponensei

1.4. A feszültségvektor komponenseinek meghatározása

A továbbiakban vizsgáljuk meg közelebbről a $\overline{\rho}_n$ feszültségvektort valamely P pont környezetében. Vegyünk fel a P ponttól kis távolságra egy \overline{n} normálvektorú síkot, így a koordinátasíkokkal együtt egy elemi tetraédert kapunk (5. ábra). A tanultak értelmében valamely test feszültségi állapota megadható a $\overline{\rho}_n = \overline{\rho}_n(\overline{n})$ függvénnyel.

Bármely pontban a feszültségi állapotot meghatározza a három egymásra merőleges síkhoz tartozó ρ_{nx} , ρ_{ny} , ρ_{nz} feszültségkomponens, vagyis a $\underline{\rho}_n$ meghatározott irányú vetületeinek nagysága. Feladatunk tehát az, hogy felírjuk az 5. ábrán látható tetraéder egyensúlyát, felhasználva a megfelelő normál illetve csúsztató feszültségösszetevőket. Az ábrán látható, hogy a normálvektor az x, y, z-tengellyel α , β , γ szöveget zár be. Amennyiben az ABC háromszög területének nagyságát dA -val jelöljük, akkor könnyen beláthatjuk, hogy az x normálisú PBC háromszög területe

$$dA_x = dA \cos \alpha,$$

illetve hasonlóképpen

$$dA_y = dA \cos \beta,$$

$$dA_z = dA \cos \gamma.$$

Ennek ismeretében írjuk fel az x, y és z-irányú egyensúlyi egyenleteket

$$\rho_{nx} dA = \sigma_x dA \cos \alpha + \tau_{xy} dA \cos \beta + \tau_{xz} dA \cos \gamma,$$

$$\rho_{ny} dA = \tau_{yx} dA \cos \alpha + \sigma_y dA \cos \beta + \tau_{yz} dA \cos \gamma,$$

$$\rho_{nz} dA = \tau_{zx} dA \cos \alpha + \tau_{zy} dA \cos \beta + \sigma_z dA \cos \gamma.$$

A három egyenletet egyszerűsítsük dA -val és megkapjuk a feszültségi állapotra jellemző három egyenletet

$$\rho_{nx} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma,$$

$$\rho_{ny} = \tau_{yx} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma,$$

$$\rho_{nz} = \tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{zy} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma.$$

A ρ_{nx} , ρ_{ny} , ρ_{nz} feszültségkomponensek ismeretében tetszőleges \bar{n} irányhoz tartozó $\underline{\rho}_n$ feszültség kiszámítható. Hasonlóképpen a feszültségi állapot skalár összetevőinek σ_x , σ_y , σ_z , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ismeretében tetszőleges \bar{n} normálvektorú síklemezhez tartozó feszültségösszetevők ρ_{nx} , ρ_{ny} , ρ_{nz} meghatározhatók.

A fenti három skalár egyenlettel megadott homogén lineáris függvénykapcsolat megfelel egy másodfokú tenzornak

$$\bar{\rho}_n = \underline{\underline{F}}\bar{n},$$

$$\text{ahol } \bar{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \text{ és}$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

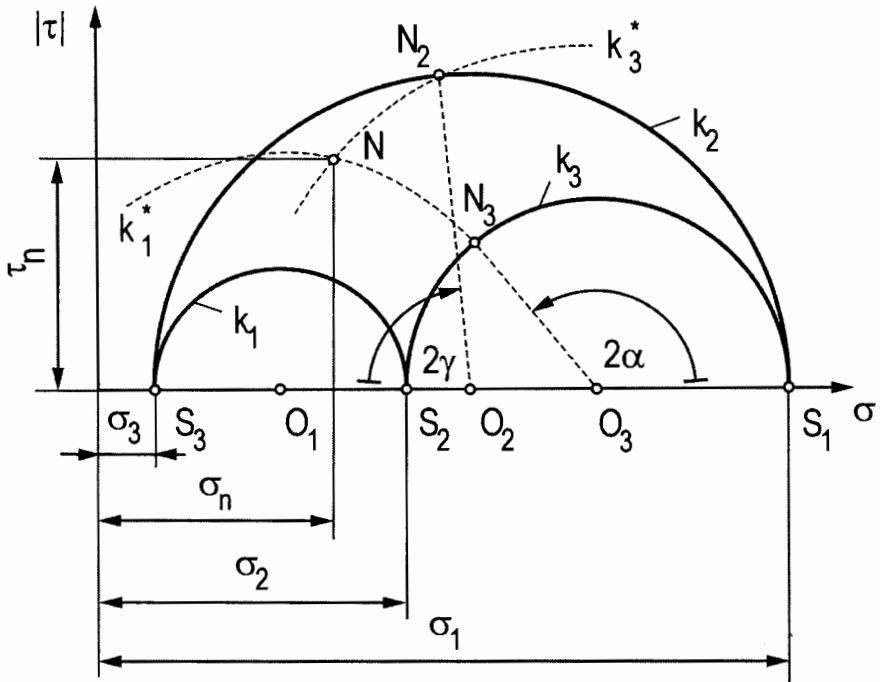
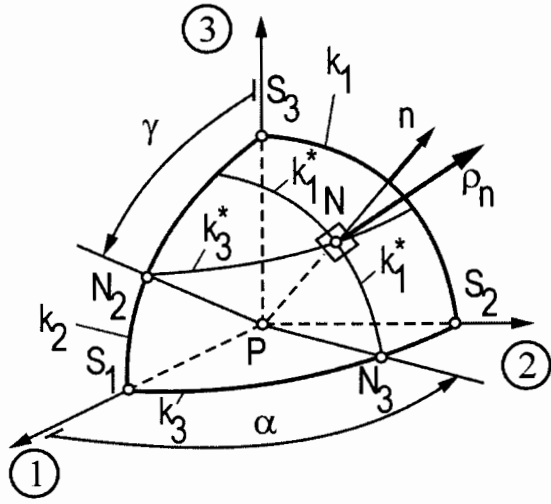
Az $\underline{\underline{F}}$ tenzort feszültségtenzornak nevezzük és a dualitás elve miatt szimmetrikus.

A szilárdságtant a továbbiakban, mivel a szükséges matematikai ismeretek még hiányoznak, ezért nem a feszültségtenzor alapján tárgyaljuk.

A vizsgált P pontban kikereshető három olyan egymásra merőleges irány, amelyekre merőleges síkokban a csúsztató feszültségek nullák. Ezekhez az irányokhoz tartozó σ_1 , σ_2 , σ_3 feszültségeket főfeszültségeknek nevezzük. Köztük a következő összefüggés áll fenn: $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$. A három főfeszültség megadja az ún. feszültségi ellipszoidnak a féltengelyeit. A feszültségi ellipszoid a feszültségi állapot egyik lehetséges szemléltetési módja.

1.5. A feszültségi állapot Mohr-féle ábrázolása

A feszültségi állapot Mohr-féle ábrázolása céljából vegyünk fel a test P pontjának környezetében egy elemi gömböt. Így elmondhatjuk, hogy az \bar{n} normálisra merőleges felületelem a gömb érintősíkjá és a gömb kis mérete miatt valamennyi pontjának feszültségállapota a P pont feszültségi állapotával egyezik meg és ennek tisztázása céljából elegendő az első ténylegcsadba eső gömbrész vizsgálata (6. ábra).



6. ábra

A feszültségi állapot Mohr-féle ábrázolása

Először vizsgáljuk meg miként képezhető le az első gömbnyolcad a síkra. A főfeszültségek ismeretében ábrázolni tudjuk értéküket ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) és megkapjuk egyúttal az S_1, S_2, S_3 jelű pontokat is. Ezután megrajzolhatjuk a megfelelő Mohr-köröket:

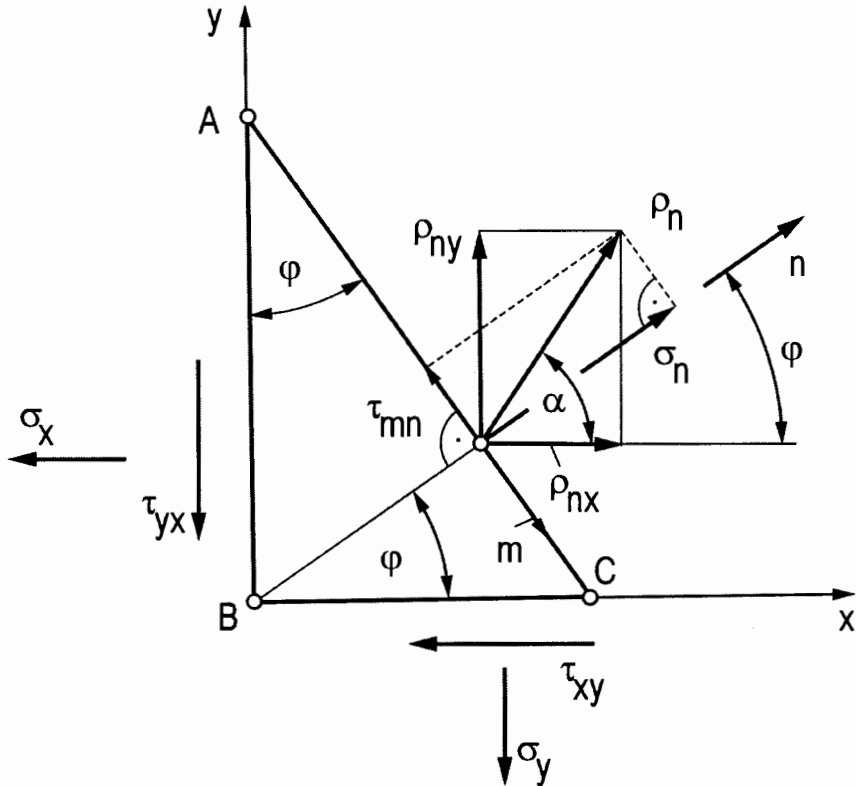
- az S_1 és S_2 pontok közti negyed körívnek megfelelő félkörívet (k_3);
- az S_2 és S_3 pontok közti negyed körívnek megfelelő félkörívet (k_1);
- az S_1 és S_3 pontok közti negyed körívnek megfelelő félkörívet (k_2).

A továbbiakban vizsgáljuk meg miként kereshetjük meg az \bar{n} irányhoz tartozó N képpont helyét a Mohr-körben. Ebből a célból vegyük fel az N ponton áthaladó és a k_3 főkörrel párhuzamos k_3^* kört, illetve a k_1 főkörrel párhuzamos k_1^* kört.

A 6. ábrán láthatjuk, hogy a k_1^* kör a k_3 -as kört az N_3 pontban metszi, a k_3^* kör a k_2 -es kört pedig az N_2 pontban. Ezután a Mohr-féle feszültségi kördiagramban meg kell keresni a k_1^* , illetve a k_3^* kört, amelyek metszéspontja megadja az N pontot. Az 1-es és 2-es fő tengelyek által kifeszített síkban az N_3 pont a k_3 körön az S_1 pontot tartalmazó 1-es tengellyel α szöget zár be, a k_3 -as jelű Mohr-körön pedig 2α szöget, mivel a negyed körívnek fél körív felel meg a leképezés szerint. Mivel a k_1 főkör képével párhuzamos k_1^* kör a Mohr-körben az O_1 -hez képest koncentrikusan helyezkedik el, ezért az O_1 középpont körül az N_3 pontból kiindulva megrajzolható a k_1^* kör képe. Az N_2 pont a 3-as fő tengellyel γ szöget zár be, ezért a leképezési szabály szerint a k_2 -es körön az S_3 -hoz képest 2γ szöget kell felmérni és így kapjuk meg a képét. Ezután az O_3 középpont körül megrajzolható az N_2 pontból kiindulva a k_3^* kör. A k_1^* és k_3^* körök metszéspontja megadja az \bar{n} normálvektorhoz tartozó N pontnak megfelelő képpontot a Mohr-körben. A fentiek ismeretében meg tudjuk határozni bármely n normálisú síkhoz tartozó $\underline{\rho}_n$ feszültségvektor összetevőinek nagyságát (σ_n, τ_n).

1.6. A síkbeli feszültségi állapot

A gyakorlatban előforduló igénybevételek jelentős része *síkbeli feszültségi állapotot* eredményez, ami akkor jön létre, ha a három főfeszültség közül az egyik zérus és a feszültségek egy síkba esnek. Ilyenkor elegendő csupán azt a síkot vizsgálni, amelyikben a feszültségösszetevők elhelyezkednek (a 7. ábra szerint az x-y síkot).



7. ábra

A síkbeli feszültségi állapot jellemzői

Az ábra alapján látható, hogy esetünkben három feszültségösszetevő (σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$) különbözik zérustól, így a vizsgálat a térbeli feszültségi állapotnál egyszerűbb. Számításainkhoz felhasználjuk a térbeli feszültségi állapotnál levezetett összefüggéseket figyelembe véve, hogy a $\bar{\rho}_n$ feszültségvektor az

x-tengellyel α , az y-tengellyel $(90^\circ - \alpha)$ szöget zár be, valamint azt, hogy $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. Ily módon a feszültségvektor komponensei az 1.4. fejezetet is felhasználva

$$\begin{aligned}\rho_{nx} &= \rho_n \cos \alpha = \sigma_x \cos \varphi + \tau \sin \varphi, \\ \rho_{ny} &= \rho_n \sin \alpha = \tau \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi.\end{aligned}$$

A fenti két egyenletből a ρ_n feszültségvektor nagysága és az x-tengellyel bezárt α szöge meghatározható. A 7. ábra alapján az n normálvektorhoz tartozó $\bar{\rho}_n$ feszültségvektor összetevőinek nagysága

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \rho_{nx} \cos \varphi + \rho_{ny} \cos(90^\circ - \varphi) = \\ &= (\sigma_x \cos \varphi + \tau \sin \varphi) \cos \varphi + (\tau \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi) \sin \varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{mn} &= \rho_{nx} \cos(90^\circ - \varphi) - \rho_{ny} \cos \varphi = \\ &= (\sigma_x \cos \varphi + \tau \sin \varphi) \sin \varphi - (\tau \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi) \cos \varphi,\end{aligned}$$

rendezés után adódik, hogy

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau \sin 2\varphi, \\ \tau_{mn} &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau \cos 2\varphi.\end{aligned}$$

A 7. ábra alapján könnyű elképzelni, hogy a φ változtatásával a ferde metszet normálisa olyan helyzetbe kerül, melynél

$$\varphi = \alpha = \varphi_0, \quad \text{ekkor} \quad \sigma_n = \rho_n = \rho_0 \text{ és } \tau_{mn} = 0.$$

Az \bar{n} normálisnak ez a helyzete a főirány és az ehhez tartozó feszültség a főfeszültség. A főfeszültség értéke és a főirány hajlásszöge úgy határozható meg, hogy a ρ_{nx} illetve ρ_{ny} számítására alkalmas összefüggésbe a φ helyébe φ_0 -t és ρ_n helyébe ρ_0 -t helyettesítünk és adódik, hogy

$$\begin{aligned}\rho_0 \cos \varphi_0 &= \sigma_x \cos \varphi_0 + \tau \sin \varphi_0, \\ \rho_0 \sin \varphi_0 &= \tau \cos \varphi_0 + \sigma_y \sin \varphi_0,\end{aligned}$$

további rendezés után

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \rho_o) \cos \varphi_o + \tau \sin \varphi_o &= 0, \\ \tau \cos \varphi_o + (\sigma_y - \rho_o) \sin \varphi_o &= 0.\end{aligned}$$

Az ismeretlen $\sin \varphi_o$ illetve $\cos \varphi_o$ -ra nézve homogén, lineáris egyenletrendszerre jutunk, melynek megoldása csak akkor létezik, ha az egyenletrendszer együtthatóinak determinánsa zérus

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \rho_o) & \tau \\ \tau & (\sigma_y - \rho_o) \end{vmatrix} = 0.$$

A determináns kifejtése és rendezés után a

$$\rho_o^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \rho_o + \sigma_x \sigma_y - \tau^2 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, melynek megoldásaként a két főfeszültséget nyerjük, amit σ_1 -gyel és σ_2 -vel jelölünk

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}.\end{aligned}$$

A kapott összefüggés formailag megegyezik a főmásodrendű nyomatékok számítására szolgáló összefüggéssel. A főirány hajlásszögét a

$$\operatorname{tg} \varphi_o = \frac{\rho_{ny}}{\rho_{nx}} = \frac{\tau \cos \varphi_o + \sigma_y \sin \varphi_o}{\sigma_x \cos \varphi_o + \tau \sin \varphi_o} = \frac{\tau + \sigma_y \operatorname{tg} \varphi_o}{\sigma_x + \tau \operatorname{tg} \varphi_o}$$

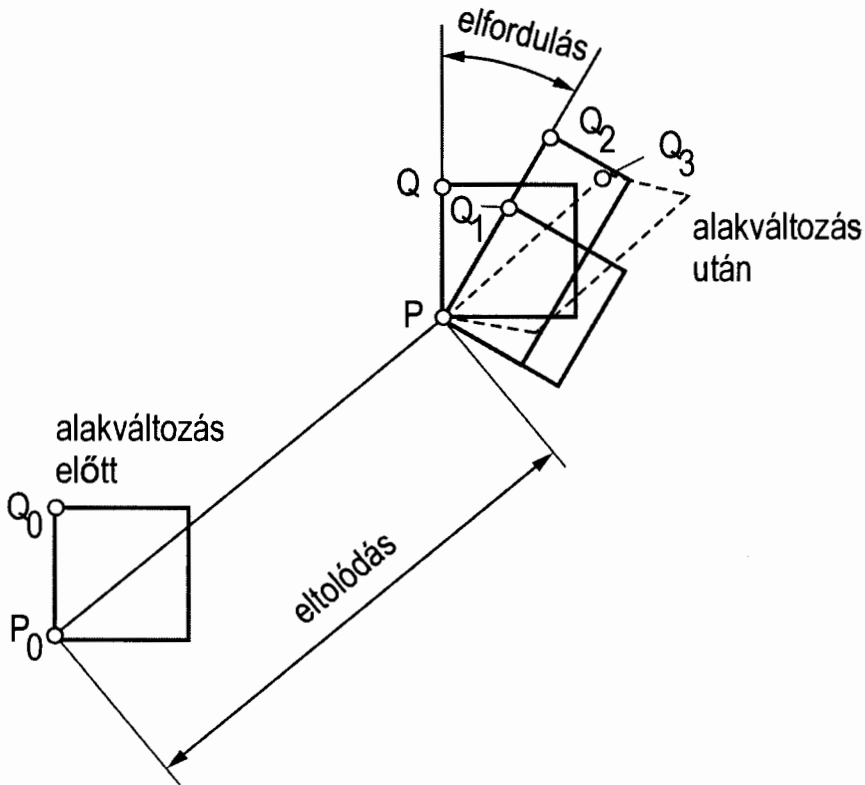
összefüggésből kapjuk rendezés után

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Esetünkben φ_0 az 1-es főtengelynek az x-tengellyel bezárt szögét jelenti. Az x-tengelyhez képest φ_0 szöggel elforgatott kiskocka lapjain σ_1 és σ_2 főfeszültségek ébrednek.

1.7. Az alakváltozási állapot

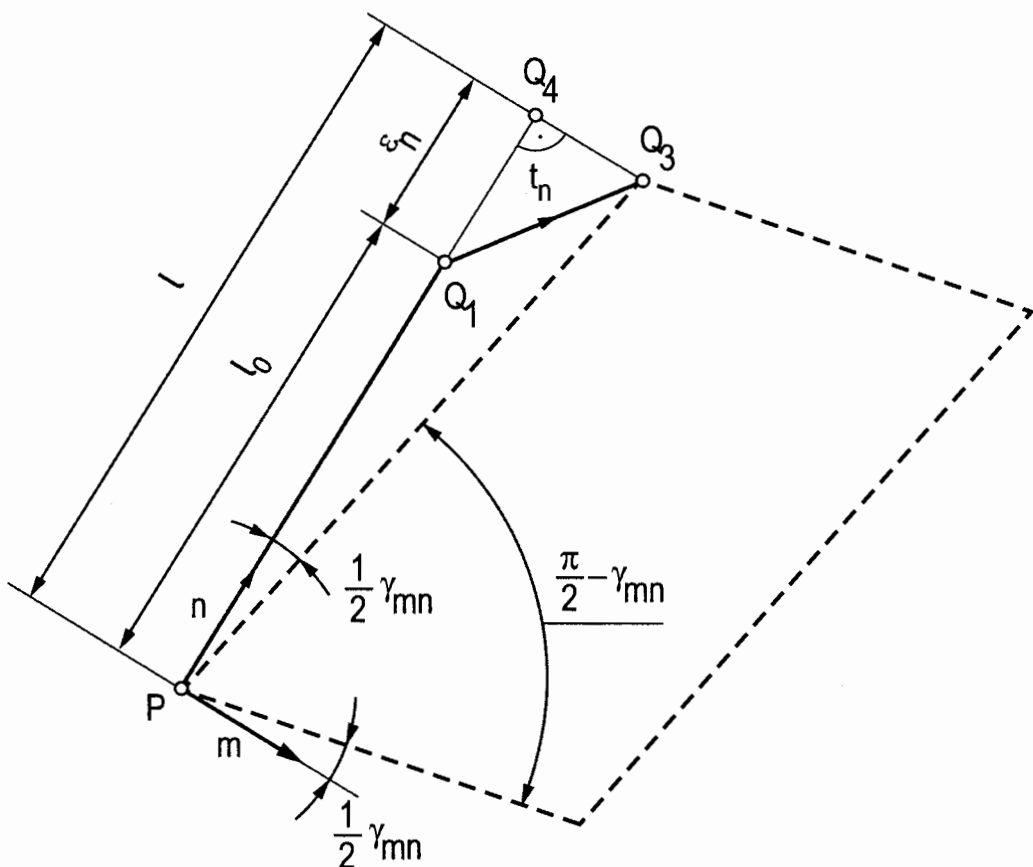
A rugalmas test alakváltozásának vizsgálatához a test belsejében válasszunk ki egy P_0 pontot és környezetében egy elemi kiskockát, melynek oldalnézete egy



8. ábra
A P_0 pont környezetének alakváltozása

négyzet (8. ábra). A továbbiakban feltételezzük, hogy a kiskocka vázolt oldal-
lapja csak a rajz síkjával párhuzamosan mozdul el. A terhelés hatására a kis
kocka alakja megváltozik:

- a P_0 környezete (az elemi kiskocka a tér P pontjába mozdul el),
- az elemi kocka elfordul (a PQ oldal a PQ_1 helyzetet veszi fel),
- a kocka oldaléleinek hossza megváltozik (a PQ_1 oldal PQ_2 hosszúságúra
nyúlik meg és a rá merőleges oldalak megrövidülnek),
- az élek által eredetileg bezárt derékszögek megváltoznak (a szaggatott
vonallal jelölt állapotnak megfelelően).



9. ábra

Az alakváltozások ábrázolása

A továbbiakban csak az oldalélek hosszának és az élek által bezárt szögek megváltozásával foglalkozunk, mivel a belső erőket csak e két alakváltozás befolyásolja. A 9. ábra szerint az alakváltozást a $\overline{Q_1Q_3}$ vektor jellemzi.

Vezessük be az alakváltozási vektor fajlagos értékét a következő módon

$$\bar{t}_n = \overline{Q_1Q_3} / |PQ_1|.$$

Ha a PQ_1 távolságot egységnyinek választjuk, akkor a \bar{t}_n az egységvektor végpontjának elmozdulását adja. Az alakváltozási vektort \bar{n} és rá merőleges \bar{m} összetevőjével szokás megadni.

A 9. ábra alapján írhatjuk, hogy

$$\overline{Q_1Q_4} = \frac{\overline{PQ_4} - \overline{PQ_1}}{\overline{PQ_1}} = \frac{l - l_0}{l_0} = \varepsilon_n,$$

ami a $\overline{PQ_1}$ oldal eredeti hosszára vonatkoztatott fajlagos hosszváltozást adja meg \bar{n} irányban, amit fajlagos nyúlásnak nevezünk. A 9. ábra szerint

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma_{mn} = \frac{\overline{Q_3Q_4}}{l_0 + \varepsilon_n} = \frac{\overline{Q_3Q_4}}{l + \varepsilon_n},$$

mivel ε_n értéke kicsi, ezért adódik, hogy

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma_{mn} \approx \overline{Q_3Q_4}.$$

Kis szögek esetén

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma_{mn} \approx \frac{1}{2} \gamma_{mn},$$

ami megadja az alakváltozási vektor \bar{n} -re merőleges vetületét. Az alakváltozási vektor tehát

$$\bar{t}_n = \varepsilon_n \bar{n} + \frac{1}{2} \gamma_{mn} \bar{m}.$$

Az összes lehetséges \bar{n} egységvektorhoz tartozó alakváltozási vektorok a P pont alakváltozási állapotát határozzák meg. A feszültségi állapothoz hasonlóan tehát az alakváltozási vektor az \bar{n} egységvektor függvénye

$$\bar{t}_n = \bar{t}_n(\bar{n}).$$

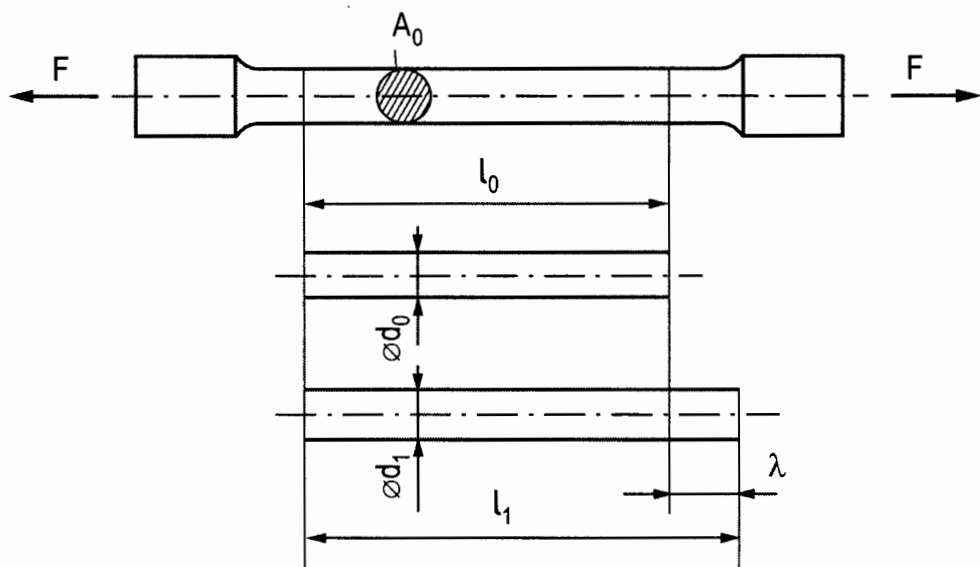
A fentiek általánosításával az x, y, z derékszögű koordinátarendszerben, – a feszültségi tenzorhoz hasonlóan – felírható az alakváltozási tenzor

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Az alakváltozási tenzor a feszültség tenzorhoz hasonlóan szimmetrikus és megkereshetők az alakváltozási állapot főirányai és főnyúlásai. A feszültségi és alakváltozási állapot összefüggései között fennálló hasonlóság miatt az alakváltozási jellemzőket Mohr-körrel ugyanúgy ábrázolhatjuk, mint a feszültségeket ($\frac{1}{2} \gamma$ és ε koordinátarendszerben).

1.8. A szakítóvizsgálat és a szakítódiagram

A húzókísérletnél (szakítóvizsgálatnál) az alkalmasan kialakított próbatestet erre a célra épített szakítógépen, szobahőmérsékleten, lassan növekvő húzó igénybevételnek vetjük alá. A vizsgálat végrehajtásáról szabvány intézkedik, amely előírja a próbatest méreteit és alakját.



10. ábra

A szakító próbatest kialakítása

Az elkészített próbatesten az l_0 szakasz képezi a vizsgálatunk tárgyát (10. ábra). Terhelés hatására a próbatest megnyúlik és l_1 hosszúságú lesz. A szakító-gép folyamatosan diagramon rögzíti a húzóerőt, valamint a megnyúlás λ értékét ($\lambda = l_1 - l_0$), vagyis az $F(\lambda)$ függvényt. A diagram alakja függ a próbatest anyagától és méreteitől is. A próbatest méreteinek hatását ha kiküszöböljük olyan diagramhoz jutunk, ami csupán a test anyagi minőségének függvénye. Ezt úgy tehetjük meg, hogy kiszámítjuk a próbatestben ébredő feszültségeket és a hozzá-tartozó fajlagos nyúlásokat. A feszültséget úgy kapjuk meg, hogy a terhelőerőt osztjuk a próbatest (eredeti) keresztmetszetével

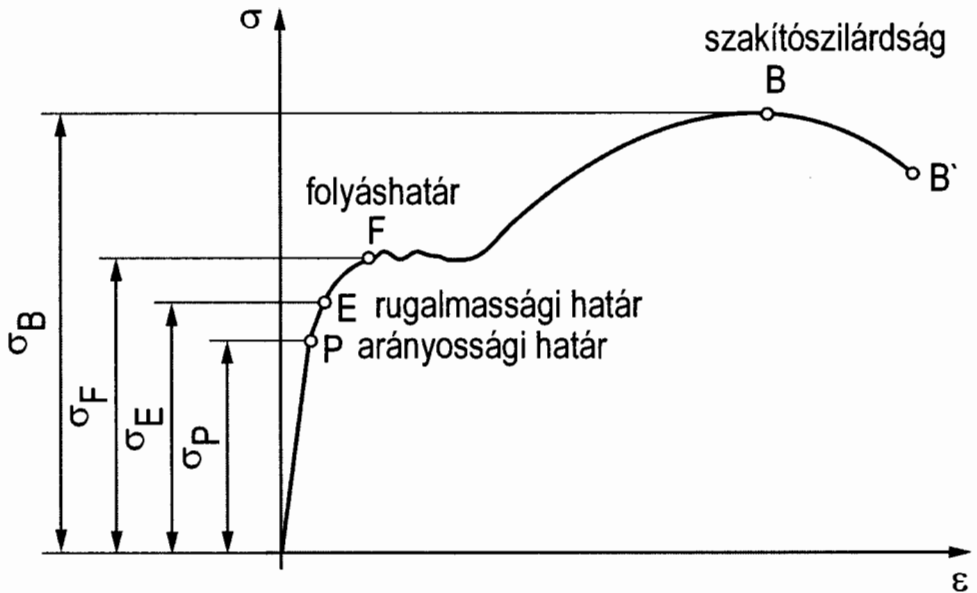
$$\sigma = \frac{F}{A_0},$$

míg a hosszirányú fajlagos nyúlás értékét az

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0},$$

$$\left(\text{illetve } \varepsilon\% = \frac{\lambda}{l_0} 100\right)$$

összefüggéssel számíthatjuk. Ily módon megkapjuk a feszültség-fajlagos nyúlás diagramot, ami már valóban a próbatestek anyagára jellemző (11. ábra).



11. ábra

A szívós acél szakítódigramja

A diagramról leolvashatjuk a legfontosabb feszültségértékeket:

- az arányossági határt σ_p - (R_a);
- a rugalmassági határt σ_E - ($R_{e\sigma}$);
- a folyáshatárt σ_F - (R_e);
- a szakítószilárdságot σ_B - (R_m).

A zárójelben szereplő mennyiségek a szabványos jelölések (szabvány megkülönbözteti az alsó folyáshatárt R_{eL} -t és a felső folyáshatárt R_{eH} -t). A felső folyáshatár a terhelőerő első maximumából számítható feszültség, amelynél a maradó alakváltozás megindul, míg az alsó folyáshatár a folyás közben mért legkisebb terhelő erőből számított feszültség.

A szakítódiaagramon megkülönböztethetünk jellegzetes szakaszokat, melyeket a következőkben ismertetünk.

Arányossági szakasz ($\sigma \leq \sigma_p$). A feszültség és a fajlagos nyúlás között az összefüggés lineáris, vagyis a szakasz egyenes. Ez azt jelenti, hogy érvényes a Hooke-törvény:

$$\sigma = E \varepsilon$$

ahol E az arányossági tényező, amit rugalmassági modulusznak, vagy Young-féle modulusznak is nevezünk, ami anyagtól függő állandó, mértékegysége $\text{N/m}^2 - [\text{Pa}]$, illetve ennek többszöröse például $[\text{MPa}]$. E szakaszra jellemző, hogy a terhelés megszűnése után a próbatest visszanyeri eredeti alakját, maradó alakváltozás nem lép fel ($\varepsilon_m = 0$).

Rugalmas szakasz ($\sigma \leq \sigma_E$). Magában foglalja az arányossági szakaszt is. A feszültség és a fajlagos nyúlás között a $\sigma_p < \sigma \leq \sigma_E$ szakaszon az összefüggés nemlineáris, de maradó alakváltozás még nem lép fel, (σ_p és σ_E majdnem egybeesik).

Képlékeny szakasz ($\sigma_E < \sigma < \sigma_F$). A terhelés megszűnése után a próbatest nem nyeri vissza eredeti alakját. Van rugalmas és képlékeny alakváltozás is.

A folyási szakasz ($\sigma = \sigma_F$). Jellemzője, hogy a terhelés növelése nélkül nagy maradó alakváltozás lép fel.

A felkeményedés szakasza ($\sigma_F < \sigma < \sigma_B$). A folyási jelenség befejeződése után a szakítógépet ismét nagy erőket regisztrál, de egyidejűleg nagy lesz a próbatest nyúlása is. E folyamat során az anyag felkeményedik, úgy viselkedik, mintha megnövekedett volna a folyáshatára.

A húzóerő a maximum (B -pont) elérése után elkezdi csökkenni. A diagram görbéje itt lefelé hajlik, a nyúlások rohamosan nőnek. A szakítószilárdság elérése után a teljes nyúlás a rúd egy rövid szakaszára korlátozódik, keresztmetszete elvékonyodik (kontrahálódik), majd csökkenő erőnél elszakad.

A szakítókísérlet során a próbatest nemcsak hosszirányban nyúlik, hanem keresztirányú mérete is megváltozik (csökken). Esetünkben $d_1 < d_0$ értékű lesz. Ennek ismeretében a *keresztirányú fajlagos nyúlás*

$$\varepsilon_k = \frac{d_1 - d_0}{d_0} < 0.$$

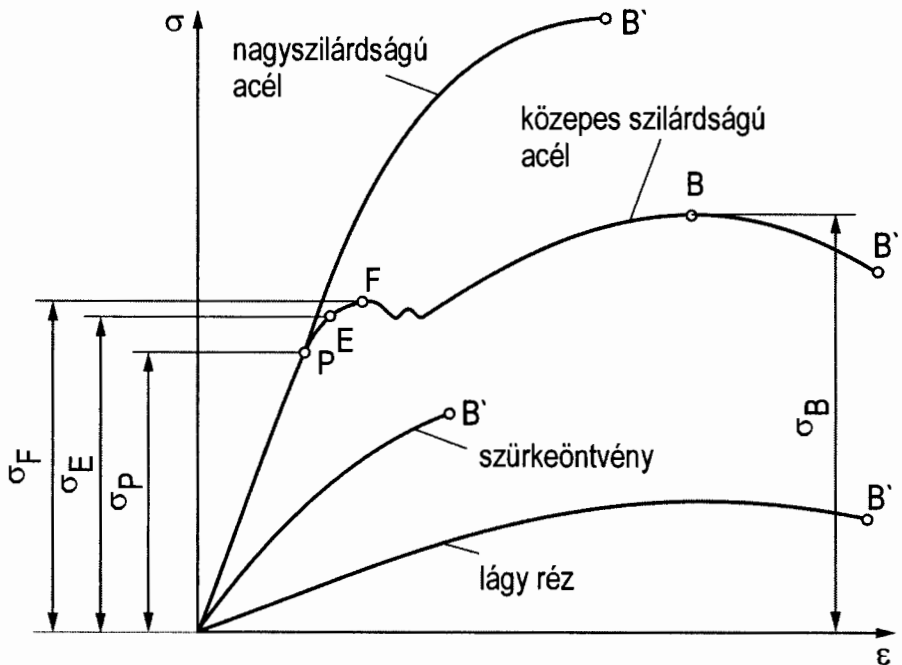
A tapasztalat alapján a szakítódíagram lineáris szakaszán a hosszirányú fajlagos nyúlás és az ε_k között az

$$\varepsilon_k = -\nu \varepsilon$$

összefüggés áll fenn, ahol ν a Poisson-tényező, melynek reciproka

$$m = \frac{1}{\nu}$$

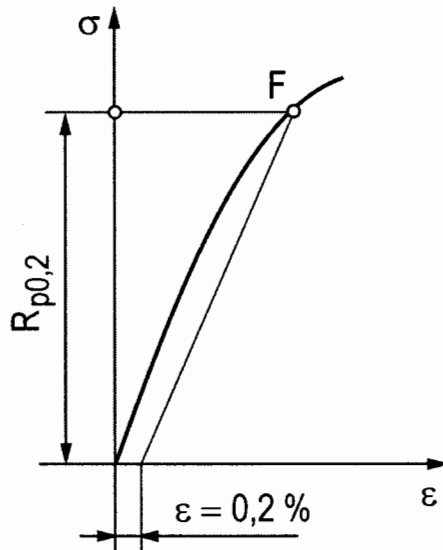
a *Poisson szám*.



12. ábra
Szakítódíagramok

Különböző anyagoknál a szakítódiagram alakja eltér a 11. ábrán láthatótól. Néhány anyag jellegzetes szakítódiagramját mutatja a 12. ábra.

Bizonyos acélfajták (például a 12. ábrán látható nagyszilárdságú acélok) és más fémes anyagok esetén a szakítódiagramon nem jelentkezik észrevehetően a folyás. Ilyenkor meghatározott nyúlásokhoz tartozó feszültségeket lehet választani a fém jellemzésére (13. ábra). Ilyen jellemző a 0,2 % nem arányos nyúláshoz tartozó feszültség, az $R_{p0,2}$, ami a szakítódiagramról leolvasható. Ha a terhelést ekkor megszüntetjük, a próbadarab 0,2 %-os maradó alakváltozást szenved.



13. ábra

Terhelt állapotban mért egyezményes folyáshatár

1.9. A megengedett feszültség és az anyagmodellek

A szakítóvizsgálat során kapott szilárdsági jellemzőket szerkezeteink méretezésénél tudjuk felhasználni a megengedett feszültség kiszámításához

$$\text{megengedett feszültség} = \frac{\text{mértékadó szilárdsági jellemző}}{\text{biztonsági tényező}}$$

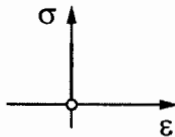
Szívós anyagoknál

$$f_m = \frac{R_{eH}}{n_T}, \text{ vagy } f_m = \frac{R_{p0,2}}{n_T},$$

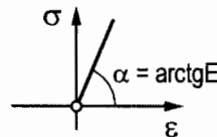
rideg anyagoknál

$$f_m = \frac{R_m}{n_B},$$

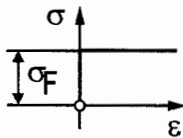
ahol f_m a megengedett feszültség, helyette a szakirodalomban σ_m -et vagy σ_{meg} -et is használnak, az n_T illetve n_B a biztonsági tényező, mértékegység nélküli, egy-nél nagyobb szám, helyette n -t is szokás használni.



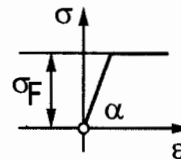
merev



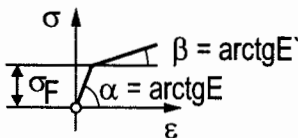
ideálisan rugalmas



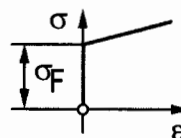
merev - ideálisan képlékeny



rugalmas - ideálisan képlékeny



rugalmas - lineárisan keményedő



merev - lineárisan keményedő

14. ábra

Anyagmodellek

A mechanika a valódi testek helyett modelleket vizsgál. Ezért egy-egy modellnél a valódi testeknek csak a legjellemzőbb tulajdonságait ragadjuk ki és úgy tekintjük, hogy a modell ezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik. A valódi szakítódigramok idealizálásával olyan modelleket alkotunk, amelyek a testek terhelés hatására megfigyelhető alakváltozásainak legjellemzőbb tulajdonságait tükrözik (rugalmas alakváltozás, képlékeny alakváltozás, keményedés). **A 14. ábra** összefoglalja a legjellemzőbb anyagmodelleket.

A legfontosabb anyagjellemzők ismeretében elkezdjük a terhelésekből adódó feszültségek illetve alakváltozások számítását.

A kialakult feszültségeloszlás a gyakorlatban függ a terhelés átadásának módjától. A levezetendő összefüggéseink használhatósága érdekében a Saint-Venant-elvet tekintjük érvényesnek. Ennek megfelelően egyensúlyi erőrendszerekkel terhelt test belsejében a terhelőerőtől kellő távolságban a feszültség nem függ az erőátadás módjától. A levezetett összefüggéseink a továbbiakban e feltétel figyelembevételével érvényesek.



2. EGYSZERŰ IGÉNYBEVÉTELEK

A statikában négy igénybevételt tárgyalunk: a húzást (nyomást), a nyírást, a hajlítást és a csavarást. A következő részben megvizsgáljuk, hogy milyen feszültségi állapot alakul ki a vizsgált keresztmetszetben ha csak egyfajta igénybevétel ébred.

2.1. Központos húzás és nyomás

2.1.1. Feszültségek és alakváltozások

Ha egy tetszőleges, állandó keresztmetszetű egyenes tengelyű rudat a határoló keresztmetszetek súlypontjában támadó és síkjára merőleges erők terhelik, akkor a rúd igénybevétele központos húzás illetve nyomás.

A továbbiakban levezetett összefüggések nyomás esetén csak rövid, zömök rudakra érvényesek, mivel hosszú, karcsú rudak esetén stabilitásvesztés (kihajlás) léphet fel.

Vágjuk a rudat gondolatban ketté a z-tengelyre merőleges síkkal, majd a vágási felületeken működő belső erőket helyettesítsük az egyenletesen megoszló σ_z feszültségekkel (15. ábra).

Ezután írjuk fel a baloldali (I-es) részre érvényes z-irányú egyensúlyi egyenletet

$$\sum F_{iz} = -F + \int_{(A)} \sigma_z dA = 0$$

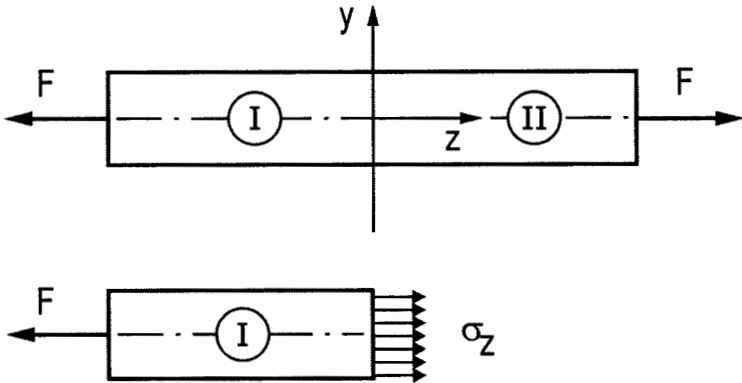
mivel σ_z állandó, ezért

$$\sigma_z \int_{(A)} dA = F,$$

ahonnan a szakítókísérlet kapcsán már megismert

$$\sigma_z = \sigma = \frac{F}{A}$$

összefüggést kapjuk.



15. ábra

A húzott rúd feszültségeloszlása

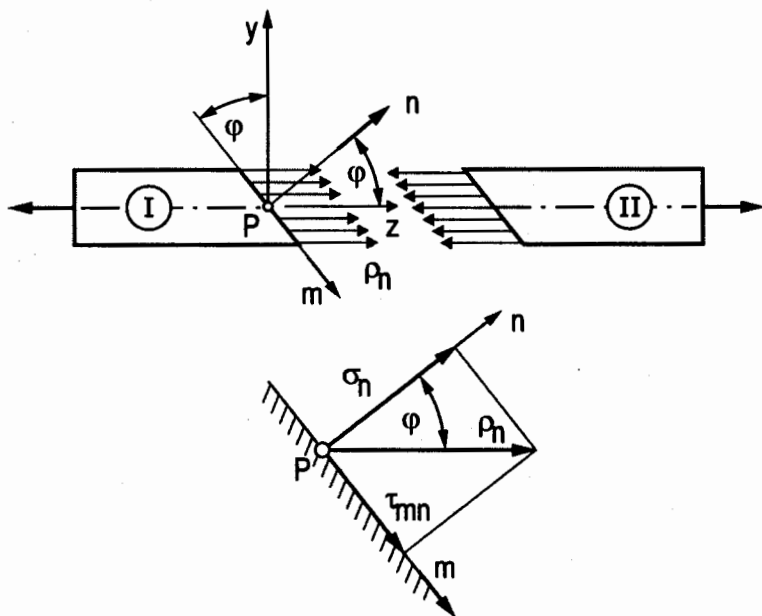
A továbbiakban a rudat egy a P-ponton áthaladó és a hossz tengelyével φ szöget bezáró síkkal vágjuk két részre (16. ábra). Belátható, hogy ezen az \bar{n} normálisú síkon is az erő irányába mutató egyenletes feszültségeloszlás alakul ki, mert teljesülnie kell az egyensúlyi egyenleteknek.

Az ábra szerinti \bar{n} - normálisú sík felülete

$$A_n = \frac{A}{\cos \varphi},$$

melynek felhasználásával a ρ_n feszültségvektor nagysága

$$|\rho_n| = \frac{F}{A_n} = \frac{F}{A} \cos \varphi = \sigma \cos \varphi.$$



16. ábra

Feszültségeloszlás a ferde metszősík mentén

A kapott feszültségvektor az ábra szerint felbontható \bar{n} -irányú normál feszültségre (σ_n -re) és a keresztmetszet síkjába eső τ_{mn} csúsztató feszültségre

$$\sigma_n = |\rho_n| \cos \varphi = \sigma \cos^2 \varphi,$$

$$\tau_{mn} = |\rho_n| \sin \varphi = \sigma \sin \varphi \cos \varphi.$$

A σ_n -re kapott összefüggésből

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma}},$$

amit a τ_{mn} képletébe helyettesítve adódik, hogy

$$\tau_{mn} = \sigma \sqrt{1 - \frac{\sigma_n}{\sigma}} \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma}}.$$

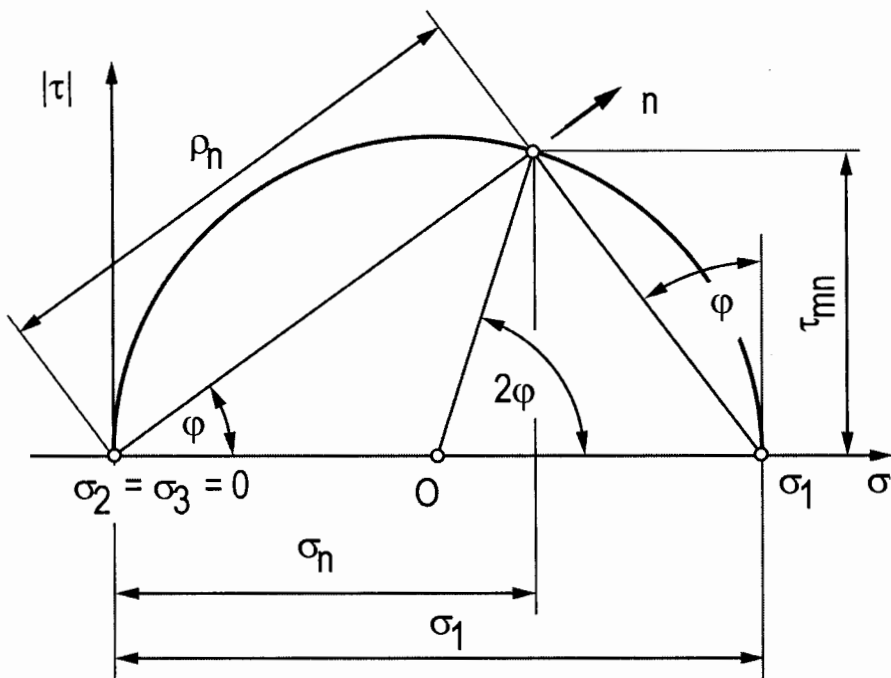
A kapott összefüggés négyzetre emelése és átalakítása után a következő eredmény adódik

$$\tau_{mn}^2 = \sigma_n \sigma - \sigma_n^2,$$

$$\tau_{mn}^2 = -\left(\sigma_n - \frac{1}{2}\sigma\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4},$$

$$\tau_{mn}^2 + \left(\sigma_n - \frac{1}{2}\sigma\right)^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2.$$

A fentiekből kitűnik, hogy ez egy kör egyenlete, amit feszültségi Mohr-körnek nevezünk (17. ábra) és esetünkben a húzó igénybevételre vonatkozik. A könnyebb megértés és ábrázolás érdekében a τ_{mn} feszültség abszolút értékét ábrázoltuk a függőleges tengelyen, ezért a kör helyett egy félkört kaptunk.



17. ábra
A húzott rúd Mohr-köre

A húzott rúd megnyúlását a szakítóvizsgálatnál megismert módon számíthatjuk

$$\lambda = l_0 \varepsilon.$$

A Hooke-törvény szerint a fajlagos nyúlás $\varepsilon = \sigma / E$, a feszültség pedig a $\sigma = F / A$ összefüggés alapján számítható. Az előző egyenletbe helyettesítés után a megnyúlás

$$\lambda = \frac{\sigma}{E} l_0, \quad \text{illetve} \quad \lambda = \frac{F l_0}{AE}.$$

2.1.2. A hirtelen keresztmetszet-változás okozta feszültségeloszlás

A fentiekben levezetett összefüggések akkor is használhatók, ha a rúd keresztmetszete kismértékben változik. Nagymértékű, hirtelen keresztmetszet-változások esetén azonban a feszültségek eloszlása a keresztmetszet mentén jelentősen módosul. Ha például egy húzott lemezbe lyukat fúrunk (18/a. ábra) akkor a feszültség értéke a lyuk mellett jelentősen megnő és az ábra szerinti feszültségeloszlás alakul ki. A lyuk közepén átmenő, húzásra igénybevett keresztmetszet

$$A_k = \nu(b - d),$$

ahol ν a lemez vastagsága. A névleges (közepes) feszültség

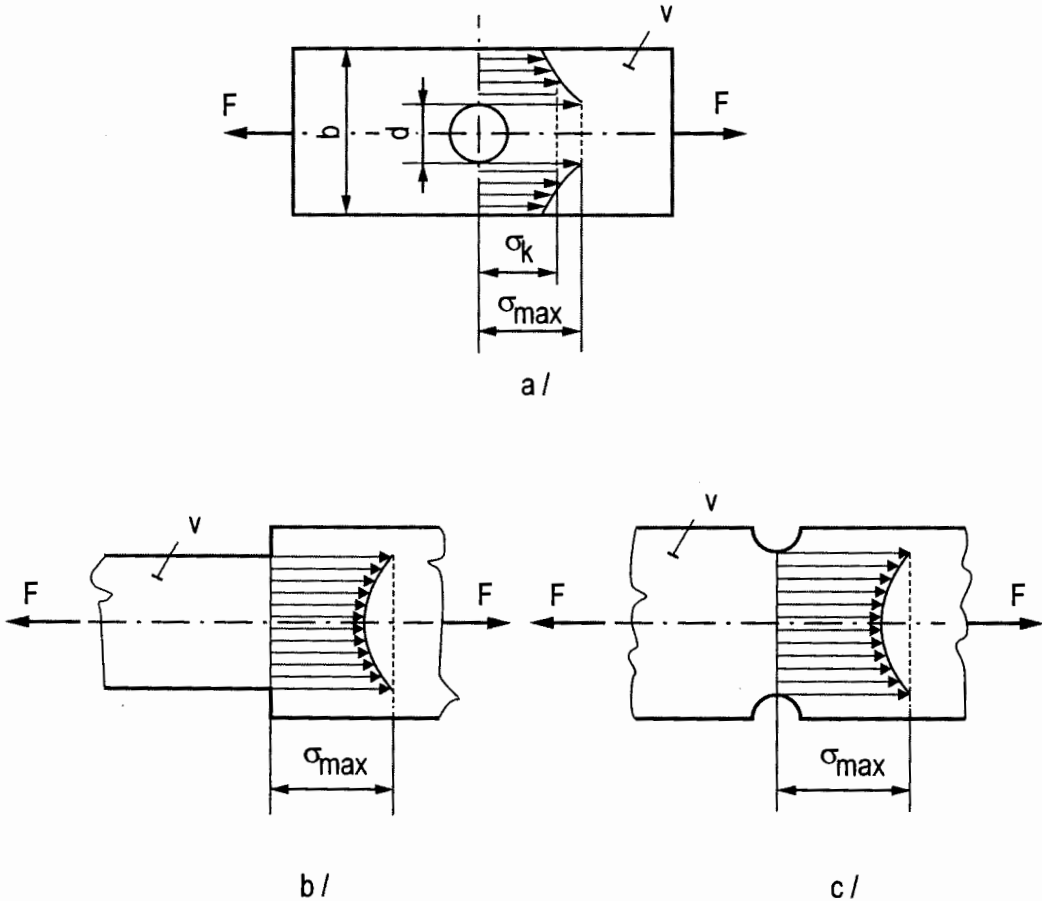
$$\sigma_k = \frac{F}{A_k}.$$

Ennek felhasználásával a maximális feszültség vagyis feszültségcsúc

$$\sigma_{max} = \alpha_k \sigma_k,$$

ahol α_k – az alaktényező, amit kísérleti úton vagy számítással lehet meghatározni. Ha az alaktényezőt diagram vagy táblázat segítségével határozzuk meg

mindig tisztázni kell, hogy a névleges feszültséget miként értelmezi a szerző. Értéke az igénybevétel módjától és a szerkezeti elem kialakulásától függ. A 18/b. és 18/c. ábra még kétfajta lemezkiakításnál létrejött feszültségeloszlást is mutat. Az éles sarkok, beszúrások, hirtelen keresztmetszet-változások feszültséggyűjtő hatása természetesen térbeli elemeknél is érvényesül.

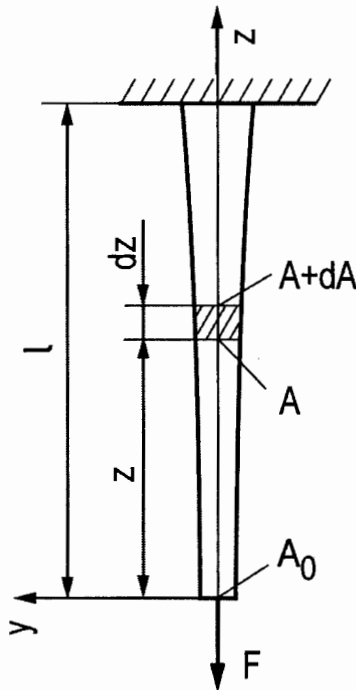


18. ábra

A hirtelen keresztmetszet-változás okozta feszültségeloszlás

2.1.3. Az egyenszilárdságú húzott rúd

A saját súlyával terhelt függőleges rúdban a legnagyobb feszültség csak a rúd egyetlen keresztmetszetében ébred, emiatt a többi keresztmetszetében levő anyag nincs kihasználva. Ez azt jelenti, hogy az ébredő σ feszültség kisebb, mint a rúd anyagára megengedett érték (σ_{meg}). Az anyag jobb kihasználása, illetve anyagmegtakarítás érdekében készülnek a változó keresztmetszetű rudak. Az olyan rudat, melynek minden egyes keresztmetszetében ugyanakkora feszültség ébred egyenszilárdságú rúdnak nevezzük. A 19. ábra szerinti rudat a saját súlyán kívül még egy F húzóerő is terheli. Feladatunk az, hogy olyan rudat tervezzünk, melynek minden egyes keresztmetszetében éppen a megengedett feszültség ébred.



19. ábra

Az egyenszilárdságú húzott rúd

Jelöljük a rúd alsó végkeresztmetszetét A_0 -val és egy tetszőleges z -helyen pedig A -val. Az A_0 keresztmetszetnek akkorának kell lennie, hogy az F erő hatására éppen a megengedett σ_m feszültség jöjjön létre. Az A jelű keresztmetszetet az F erő és az alatta levő rúddarab G súlya terheli, míg a felette levő keresztmetszetet az említett igénybevételek mellett a dz hosszúságú rúdszakasz dG súlya is igénybe veszi. Ennek megfelelően az $A+dA$ keresztmetszet igénybevétele

$$F + G + dG,$$

ahol $dG = \rho g A dz$ és ρ a rúd anyagának sűrűsége. Az egyenszilárdságú rúd esetén minden egyes keresztmetszetben

$$\sigma_m = \frac{F + G}{A} = \frac{F + G + \rho g A dz}{A + dA}$$

feszültség ébred. $A + dA$ -val történő szorzás után adódik, hogy

$$\sigma_m A + \sigma_m dA = F + G + \rho g A dz,$$

mivel

$$\sigma_m A = F + G,$$

ezért a fenti egyenletből kapjuk, hogy

$$\sigma_m dA = \rho g A dz.$$

A kapott differenciálegyenlet változóit szétválasztva a következő határozott integrál írható fel

$$\int_{A_0}^A \frac{dA}{A} = \int_0^z \frac{\rho g}{\sigma_m} dz.$$

Az integrálás elvégzése után

$$\ln \frac{A}{A_0} = \frac{\rho g}{\sigma_m} z$$

összefüggés adódik. A keresztmetszet változás az alábbi formában is felírható

$$A = A_0 e^{\frac{\rho g}{\sigma_m} z}.$$

A levezetett egyenlet csak kismértékű keresztmetszet változás esetén érvényes, amikor a rúd kontúrjának érintője a hossztengelyével 5° -nál kisebb szöget zár be.

Mivel a feszültségek eloszlása a rúd hossza mentén egyenletes, ezért a fajlagos nyúlás állandónak tekinthető, ezért

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{A_0 E} = \frac{F + G}{AE}.$$

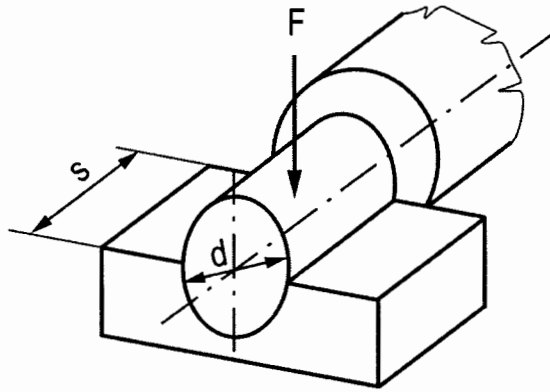
Az l hosszúságú rúd teljes megnyúlása

$$\lambda = l\varepsilon = \frac{Fl}{A_0 E}.$$

Amennyiben a rúd végére ható F erőt eltávolítjuk, akkor vizsgálható a saját súlyával terhelt rúd.

2.1.4. A felületi és palástnyomás

Két egymással érintkező test között az erő gyakran egy bizonyos síkfelületen adódik át. Ennek következtében az anyagoknak meghatározott felületi nyomást kell elviselniük, aminek kisebbnek kell lennie, mint a megengedett felületi nyomás. Amennyiben a nyomás nem síkfelületen, hanem valamilyen görbe felületen adódik át, akkor palástnyomásról beszélünk. Ilyen esettel találkozunk siklócsapágyaknál, amikor a tengelycsap egy hengeres furatban helyezkedik el (20. ábra). A tengelycsapról átadódó F erőt a csapágy hengeres része veszi fel. Ennek megfelelően a



20. ábra
A palástnyomás értelmezése

$$p = \frac{F}{ds}$$

palástnyomásnak kisebbnek kell lennie mint a szóban forgó anyagra megengedett érték.

2.1.5. A hőmérsékletváltozás okozta feszültségek

Ismert tény, hogy hőmérséklet-változás hatására a szilárd testek alakváltozást szenvednek. A továbbiakban vizsgáljunk egy olyan l_0 hosszúságú rudat, melyet t_1 hőmérsékletű levegő vesz körül. Ha a levegő hőmérséklete t_2 értékre emelkedik, akkor a rúd megnyúlása

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta t,$$

ahol α a lineáris hőtágulási együttható és $\Delta t = t_2 - t_1$ a hőmérséklet-változás. A fajlagos nyúlás

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\alpha l_0 \Delta t}{l_0} = \alpha \Delta t.$$

Amennyiben a rúd két végét befogjuk és így meggátoljuk szabad alakváltozását, akkor benne

$$\sigma = -E\varepsilon = -E\alpha\Delta t = -E\alpha(t_2 - t_1)$$

feszültség ébred. (A negatív előjel azt jelenti, hogy a rúdban nyomófeszültségek ébrednek).

A fenti összefüggések akkor is használhatók, ha a környezeti hőmérséklet csökken.

2.2. A nyírás

A mechanikai értelemben használatos nyírás fogalma megegyezik a köznyelvben használt nyírás fogalmával, mert például a fű és a haj nyírásakor is az erő a fű illetve a haj hossz tengelyére merőleges síkban hat. E feltételezés azonban már nem helytálló, ha vastagabb lemezt vágunk, mert ebben az esetben, ha az olló élei behatolnak az anyagba, akkor a vágóerő már nem egy él mentén, hanem egy felületen oszlik el. Emiatt a két felületen megoszló erőrendszer eredője erőpárt alkot (21. ábra) és hajlító nyomaték is ébred. Ennek következtében a vágott anyag igénybevétele hajlítás és nyírás, amivel az 5.5. fejezetben foglalkozunk. Jelen esetben vizsgálatainkat arra az esetre korlátozzuk, amikor vágóerő okozta nyírófeszültségek a vágás síkjában egyenletesen oszlanak el és azt mondhatjuk hogy az erők az I-es és II-es rúdrészt a vágás síkjában egymáshoz képest el akarják csúsztatni.

Egyenletes nyírófeszültség eloszlást feltételezve a 21. ábra alapján látható, hogy a nyírásra igénybevett felület egy dA felületelemén $\tau_{yz}dA$ erő ébred. Ennek alapján felírhatjuk az y -irányú erőegyensúlyt

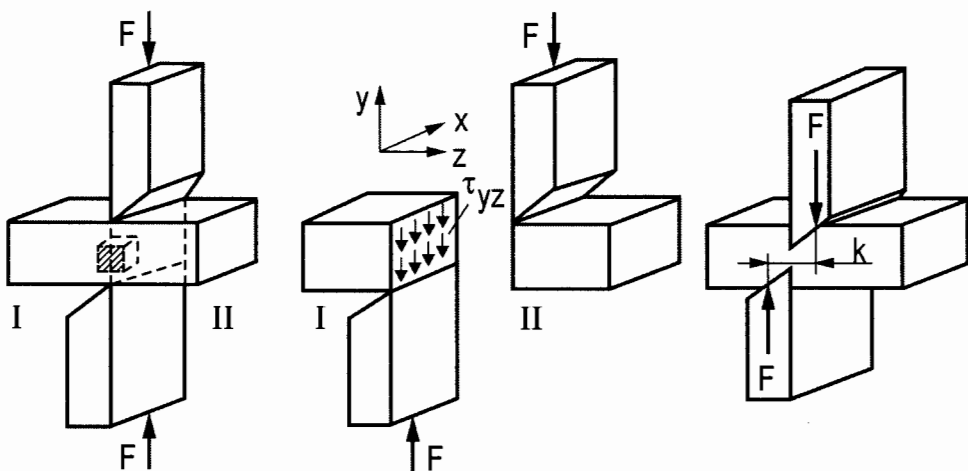
$$\sum F_{iy} = 0 = F - \int_{(A)} \tau_{yz} dA ,$$

innen

$$\tau_{yz} = \tau = \frac{F}{A}$$

a tiszta nyírás alapösszefüggése.

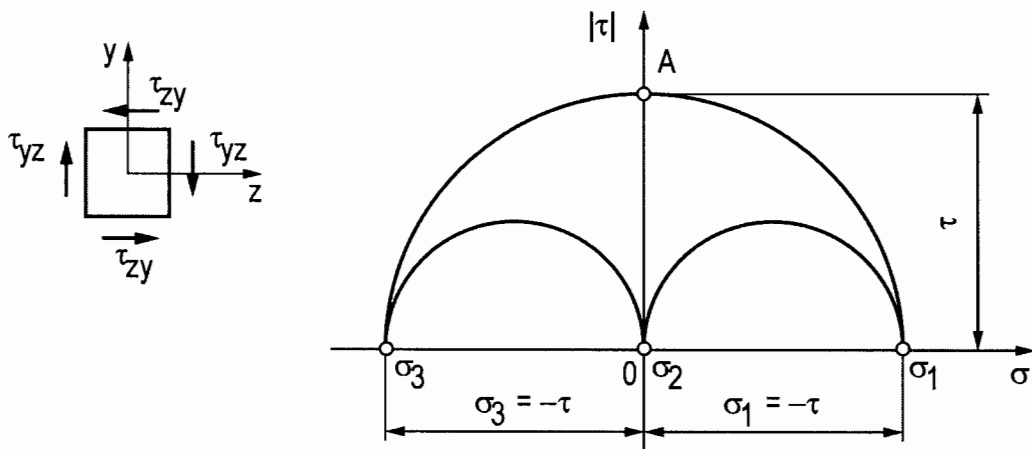
Látható, hogy tiszta nyírás esetén a nyírófeszültségek közepes értéke nem függ a nyírt keresztmetszet alakjától, csupán a nagyságától.



21. ábra

A tiszta nyírás okozta feszültségek eloszlása

Vegyük ki az ábrán látható kiskockát a rúdból és az oldalnézeti képére rajzoljuk rá az ébredő feszültségeket (22. ábra), melynek alapján könnyen meg tudjuk szerkeszteni a feszültségi állapot Mohr-körét, hiszen normál feszültség nem ébred, ezért $\sigma=0$ és $\tau_{yz}=\tau$ adja a Mohr-kör A pontját, a kör sugara pedig az OA távolság. Látható, hogy $\sigma_1=\tau$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-\tau$. A feszültségi állapothoz tartozó feszültségtenzor a $\tau_{yz}=\tau_{zy}$ helyek kivételével zérus értékeket tartalmaz



22. ábra

A tiszta nyírás Mohr-köre

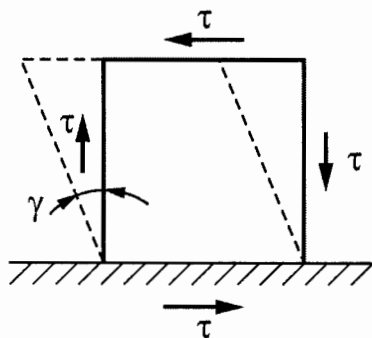
$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

Nyírás esetén is meg lehet határozni a feszültségek és alakváltozások között fennálló összefüggést. Ha egy sík lapra rugalmas kockát ragasztunk majd vízszintes síkban ható olyan erővel terheljük, amelyik a lap felületén egyenletesen oszlik el, akkor a kocka a 23. ábra szerint alakváltozik, vagyis a terhelés hatására γ szögtorzulást szenved. Tapasztalat alapján a τ és γ között a szakítódiagramhoz hasonló összefüggés áll fenn. Kezdeti szakasza acélra és több más szerkezeti anyagra lineáris, ezért felírható a nyírásra vonatkozó Hooke-törvény

$$\tau = G\gamma$$

ahol G a csúsztató rugalmassági modulusz, mértékegysége (a rugalmassági moduluszhoz hasonlóan) N/m^2 . A csúsztató rugalmassági modulusz anyagjellemző. Az E , G , valamint a Poisson tényező ν (illetve Poisson szám m) értéke között a következő elméleti megoldással levezetett és kísérletekkel alátámasztott összefüggés áll fenn

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{m}{2(m+1)} E.$$



23. ábra

A szögtorzulás értelmezése

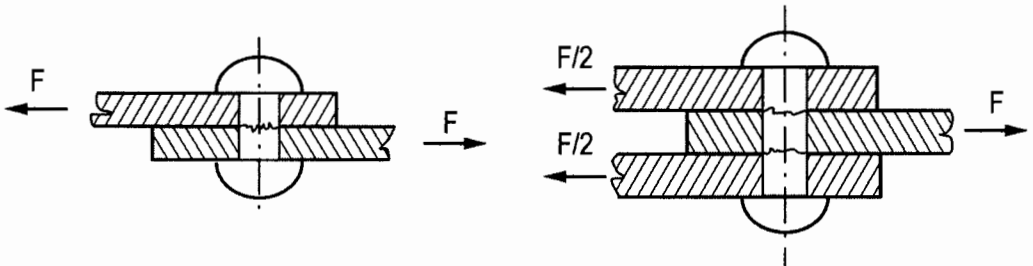
Néhány gyakrabban előforduló anyagra az anyagjellemzők tájékoztató értékét az 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat

Anyag	Anyagjellemző			
	E [GPa]	G [GPa]	$\nu=1/m$ [-]	m [-]
Acél	210	80	0,30	3,33
Ötöttvas	75	30	0,24	4,17
Alumínium	72	28	0,30	3,33
Sárgaréz	125	46	0,37	2,70

A közölt anyagjellemzők pontos értéke függ az anyag összetételétől.

A gyakorlatban tiszta nyíró igénybevétel fordul elő vékony lemezek vágásakor, szegecskötéseknél (24. ábra), kivágó szerszámoknál, a ragasztás síkjába eső húzóerővel terhelt átlapolt ragasztott kötéseknél.



24. ábra

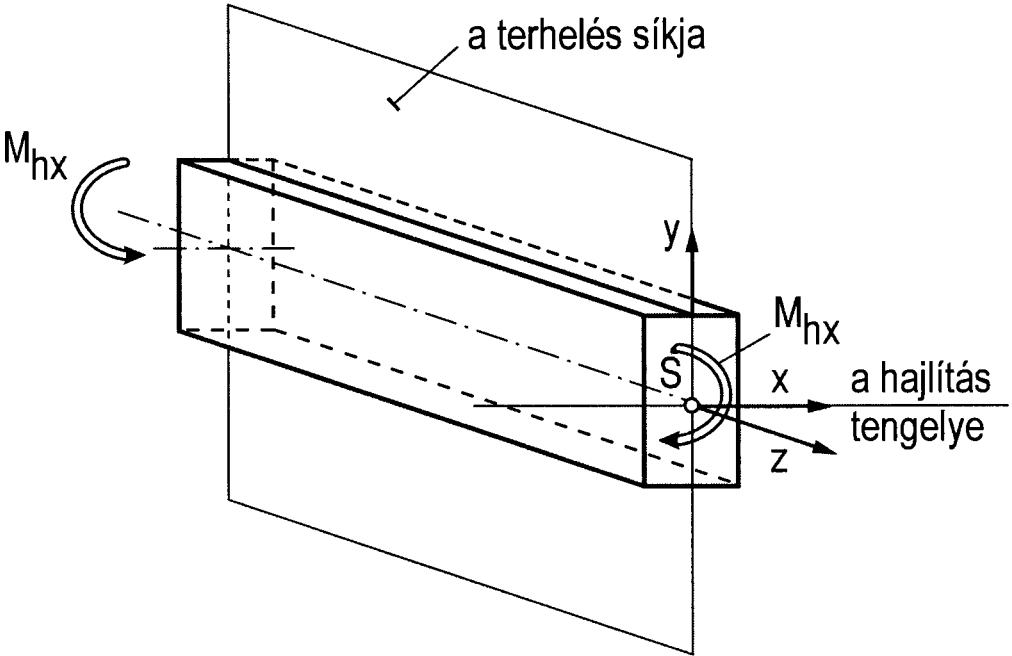
Egyszer- illetve kétszer nyírt szegecskötés

2.3. A hajlítás

2.3.1. A hajlításból származó feszültségek meghatározása

A gépek, berendezések és létesítmények számos szerkezeti eleme hajlító igénybevételnek van kitéve. Az igénybevételi ábrák szerkesztésekor láttuk, hogy nagyon gyakran a hajlítással együtt nyírás is fellép. Ezzel az esettel majd a későbbiek-

ben foglalkozunk. Jelen vizsgálatunkat arra az esetre korlátozzuk, amikor a rudat csak hajlító nyomaték terheli a 25. ábra szerint. Ha a prizmatikus rudat a két végén közös síkban fekvő, azonos nagyságú, ellentétes értelmű erőpár terheli, akkor a rúd igénybevétele tiszta hajlítás. Ezt az esetet párhuzamos vagy egyenes hajlításnak is szokás nevezni.



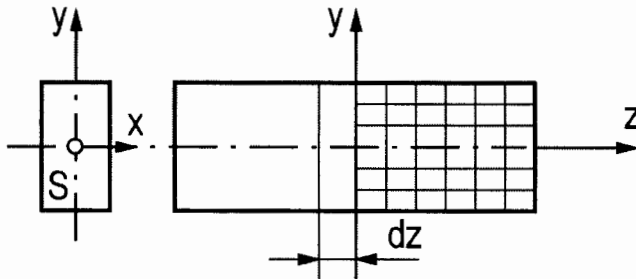
25. ábra

Párhuzamos hajlításra igénybevett rúd

Az ábra szerint az y - z sík a terhelés síkja és az x -tengely a hajlítás tengelye. A továbbiakban a hajlítást egy olyan tartó kapcsán vizsgáljuk, melynek keresztmetszete legalább egy szimmetriatengellyel rendelkezik. Az egyes rúdkeresztmetszetek súlypontjait összekötő tengely (z -tengely) a terhelés hatására meggörbül, de hossza nem változik meg. Ezt a görbült tengelyt a rúd rugalmas vonalának (semleges szálnak) szokás nevezni. Egyenes hajlítás esetén a hajlítás tengelye és a semleges tengely egybe esik. Hajlítás előtt karcoljunk a rúd oldalfelületére függőleges és vízszintes vonalakat és így téglalap alakú rácsozatot kapunk (26/a. ábra). A hajlítónyomaték okozta alakváltozás után a rácsozat eltor-

zul, mégpedig úgy, hogy a semleges réteg fölötti szálak megnyúlnak az alatt levők pedig megrövidülnek 26/b. ábra. A rúdkeresztmetszetek a hajlítás tengelye körül elfordulnak. A hajlítás hatására létrejött feszültségek meghatározása céljából a továbbiakban vizsgáljuk meg a rúd dz hosszúságú elemét. Vizsgálataink során érvényesnek tekintjük az ún. Bernoulli-Navier féle feltételezéseket:

- a rúd geometriai tengelyére merőleges sík keresztmetszetek a hajlítás után is síkok és önmagukkal egybevágók maradnak,
- a rúd geometriai tengelye és azzal párhuzamos bármelyik egyenes az alakváltozása után is merőleges marad az egyes elfordult keresztmetszetek síkjára.

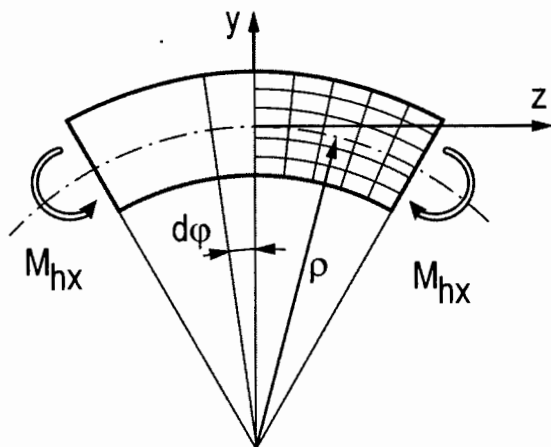


26/a. ábra

Alakváltozása előtti állapot

A továbbiakban a 26/c. ábrán látható dz hosszúságú rúdszakaszt vizsgáljuk. A z -tengely a rúd hossz tengelyével esik egybe, míg az x és y -tengely a keresztmetszet síkjában helyezkedik el. A rúdelem baloldali végét az x -tengely körül ható M_{hx} hajlító nyomaték terheli, míg a jobboldali részt az ismeretlen megoszló belső erőrendszer. Az ábrán látható dA felület elemet $\sigma_z dA$ nagyságú erő terheli. A keresztmetszetben csak normál feszültségek ébrednek, ezért a belső erők párhuzamos erőrendszert alkotnak. Az x és y irányú egyensúlyi egyenletekből adódik, hogy a belső erőknek nincs x és y irányú összetevőjük és nincsen a z -tengely körül forgató hatásuk. Ennek következtében az alábbi egyensúlyi egyenletek írhatók fel

$$\begin{aligned}\Sigma F_{iz} &= \int_{(A)} \sigma_z dA = 0, \\ \Sigma M_{hxi} &= M_{hx} - \int_{(A)} y \sigma_z dA = 0, \\ \Sigma M_{hyi} &= \int_{(A)} x \sigma_z dA = 0.\end{aligned}$$



26/b. ábra
Alakváltozása utáni állapot

A harmadik egyenletet nem használhatjuk, mivel nincsen az y -tengely körül forgató erőpár, így vizsgálatainkhoz csak az első és második egyenletet tudjuk felhasználni. Ezekből az egyenletekből az ismeretlen eloszlású σ_z feszültséget nem tudjuk meghatározni, ezért a feladat statikailag határozatlan. Mivel az y -tengely a keresztmetszet szimmetria tengelye, ezért a σ_z feszültség eloszlása csak az y értékétől függ. Jelöljük a semleges szál görbületi sugarát ρ -val és ennek alapján írjuk fel a CD hosszúságú szál fajlagos nyúlását

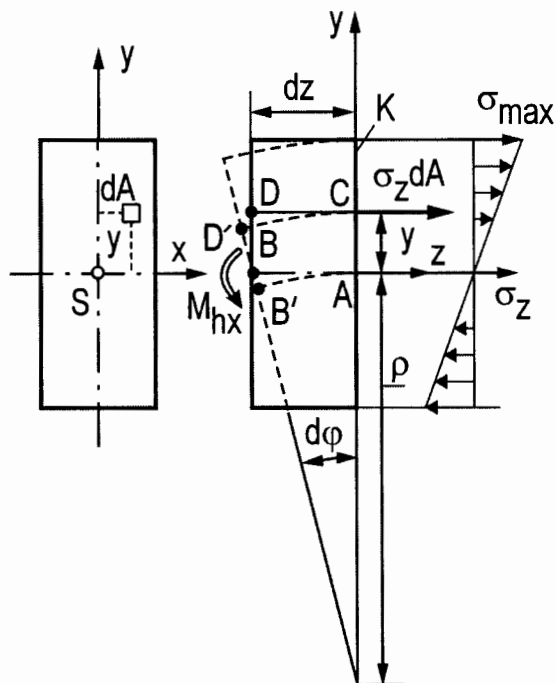
$$\varepsilon_z = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Az egyszerű Hooke-törvény felhasználásával a

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E \frac{y}{\rho}$$

összefüggést kapjuk. Az összefüggésből látható, hogy a normál feszültségek az y -tengely mentén lineáris eloszlásúak. Ezután helyettesítjük be a σ_z értékét az első egyenletbe, mivel E és ρ állandó, ezért írhatjuk, hogy

$$\Sigma F_{iz} = 0 = \int_{(A)} \sigma_z dA = \frac{E}{\rho} \int_{(A)} y dA = 0.$$



26/c. ábra

A hajlított rúd alakváltozása

Mivel $E \neq 0$ és $\rho \neq \infty$, ezért

$$\int_{(A)} y dA = 0,$$

a keresztmetszet x -tengelyre számított statikai nyomatéka, ami akkor zérus, ha az x súlyponti tengely.

A hajlításból származó normál feszültségek meghatározására csak a második egyenletet tudjuk felhasználni. A fenti összefüggést a második egyenletbe helyettesítve rendezés után kapjuk, hogy

$$M_{hx} - \int_{(A)} \frac{E}{\rho} y^2 dA = 0.$$

Mivel E és ρ állandó, ezért kiemelhető az integráljel elé

$$\frac{E}{\rho} \int_{(A)} y^2 dA = M_{hx}.$$

Az $\int_{(A)} y^2 dA$ mennyiség a keresztmetszet súlyponti x-tengelyére számított másodrendű nyomatéka, ezért írhatjuk, hogy

$$\frac{E}{\rho} I_x = M_{hx}.$$

A Hooke-törvény felhasználásával rendezés után kapjuk, hogy

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y.$$

A fenti összefüggés a tiszta hajlítás esetén érvényes Navier-képlet. Látható, hogy amennyiben az y értéke pozitív, akkor pozitív normál feszültség adódik, ellenkező esetben pedig a feszültségek negatív értékűek. Ez azt jelenti, hogy a semleges tengely fölötti keresztmetszetek húzásra a tengely alattiak pedig nyomásra lesznek igénybe véve. A normál feszültségek eloszlása az y -tengely mentén lineáris lesz, függetlenül a keresztmetszet alakjától. A maximális normál feszültség a keresztmetszet szélső szélében ébred, amit a következő összefüggéssel lehet meghatározni

$$\sigma_{max} = \frac{M_{hx}}{I_x} e_x = \frac{M_{hx}}{K_x},$$

ahol K_x a keresztmetszeti tényező.

A feszültségi állapot Mohr-köre a húzott illetve nyomott részen megegyezik a húzott illetve nyomott rúd Mohr-körével.

2.3.2. A hajlított rúd alakváltozása

Mivel vizsgálatainkat kis alakváltozásokra korlátozzuk és a semleges szál nem alakváltozik, ezért a 26/c. ábra alapján írhatjuk, hogy

$$\operatorname{tg} d\varphi \approx d\varphi = \frac{dz}{\rho},$$

illetve

$$\frac{l}{\rho} = \frac{M_{hx}}{I_x E}.$$

Összevonás után kapjuk, hogy

$$d\varphi = \frac{M_{hx}}{I_x E} dz.$$

Integrálás után a végkeresztmetszetek egymáshoz viszonyított szögelfordulása

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{hx}}{I_x E} dz.$$

Állandó keresztmetszetű, koncentrált nyomatékkal terhelt l hosszúságú hajlított rúd esetén a végkeresztmetszetek egymáshoz viszonyított szögelfordulása az alábbiak szerint számítható

$$\varphi = \frac{M_{hx} l}{I_x E}.$$

2.3.3. A rugalmas szál differenciálegyenlete

Eddigi vizsgálataink alapján látható, hogy a rúd súlyvonala (semleges szála) meggörbül és az egyes rúdkeresztmetszetek elfordulnak. Feladatunk, hogy a rúd meggörbült semleges szálának egyenletét meghatározzuk, melynek ismeretében tetszőleges pontjának elmozdulását, illetve valamely keresztmetszetének szögelfordulását ki lehet számítani. A rúd görbülete a görbületi sugár reciprokéval egyenlő. Valamely függvény görbületét a matematikából ismert összefüggés alapján is ki lehet számítani. A 27. ábra szerint az $y(z)$ függvény görbületére az alábbi összefüggést kapjuk

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}},$$

ahol $d^2y/dz^2 = y''$ és $dy/dz = y'$. Mivel kis alakváltozásokkal foglalkozunk, ezért $y' = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi \ll 1$.

Ezen értékek és az

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{hx}}{I_x E}$$

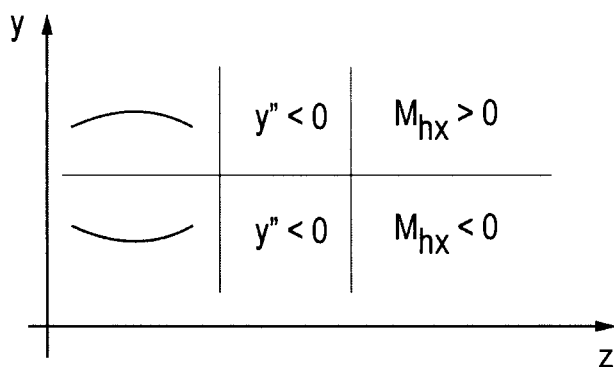
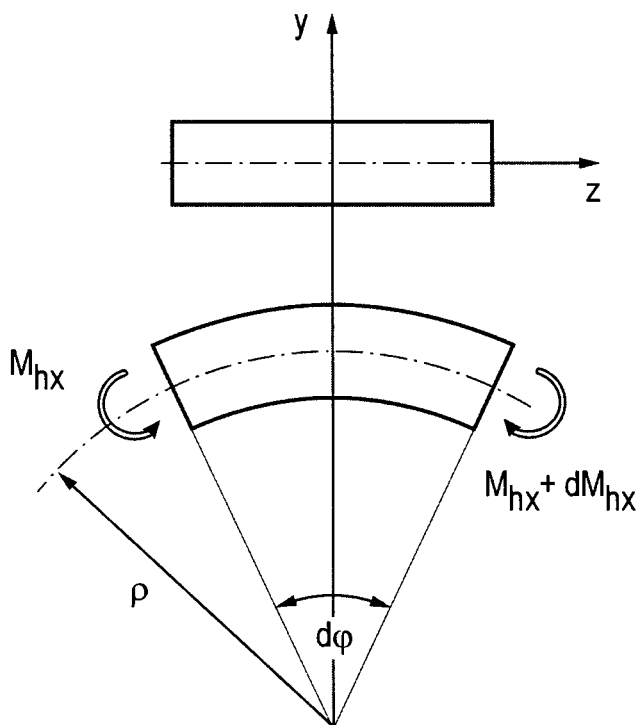
összefüggés felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{M_{hx}}{I_x E} = \pm y''.$$

Az y'' derivált előjele az igénybevételeknél elfogadott előjelszabálytól és az y - z koordinátarendszerben értelmezett függvény görbületétől függ. Esetünkben, ha a függvény alulról nézve domború, akkor a görbület pozitív, ellenkező esetben pedig negatív.

A 27. ábráról látható, hogy amennyiben a görbület negatív, akkor a hajlításból származó igénybevétel pozitív és fordítva. Ennek megfelelően a rugalmas szál differenciálegyenletében mindig a negatív előjel érvényes

$$y'' = -\frac{M_{hx}}{I_x E}.$$



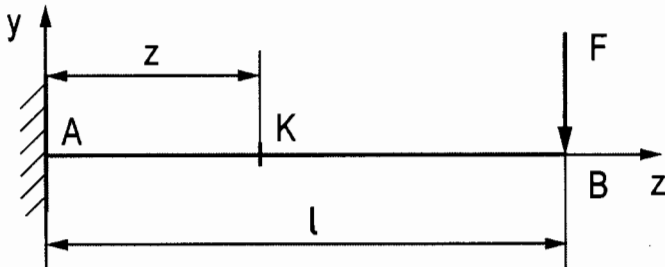
27. ábra

Hajlított rúd görbülete és előjel szabálya

A rugalmas szál differenciálegyenletének megoldása révén meghatározható valamely rúd semleges vonalának egyenlete, tetszőleges pontjának elmozdulása (lehajlása), valamint keresztmetszetének szögelfordulása.

2.3.3.1. A befogott tartó alakváltozásainak meghatározása

A továbbiakban meghatározzuk a 28. ábrán látható tartó maximális lehajlását és szögelfordulását ($I_x E$ állandó).



28. ábra

Koncentrált erővel terhelt befogott tartó

A tartó K-keresztmetszetében ébredő hajlító nyomaték értéke

$$M_{hx}(z) = F(l - z).$$

Ezt az értéket a rugalmas szál differenciálegyenletébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$y'' = -\frac{M_{hx}(z)}{I_x E} = -\frac{F}{I_x E}(l - z).$$

A fenti differenciálegyenletet a z-szerinti integrálással lehet megoldani

$$y' = -\frac{F}{I_x E}\left(lz - \frac{z^2}{2}\right) + C_1.$$

A C_1 integrálási állandó meghatározásához fel tudjuk használni azt a peremfeltételt, hogy a tartó keresztmetszetének szögelfordulása a $z=0$ helyen zérus $y' = \varphi = 0$. Innen adódik, hogy $C_1 = 0$ és

$$y' = -\frac{F}{I_x E}\left(lz - \frac{z^2}{2}\right).$$

További integrálással kapjuk, hogy

$$y = -\frac{F}{I_x E} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + C_2.$$

Mivel a befogásnál ($z=0$ helyen) a keresztmetszet súlypontjának elmozdulása (lehajlása) zérus, ezért $C_2=0$ és a rugalmas vonal egyenlete

$$y(z) = -\frac{F}{I_x E} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right).$$

A tartó maximális lehajlása (a $z=l$ helyen)

$$y_{max} = -\frac{Fl^3}{3I_x E}.$$

A tartó keresztmetszetének maximális szögelfordulása szintén a $z=l$ helyen jön létre, így

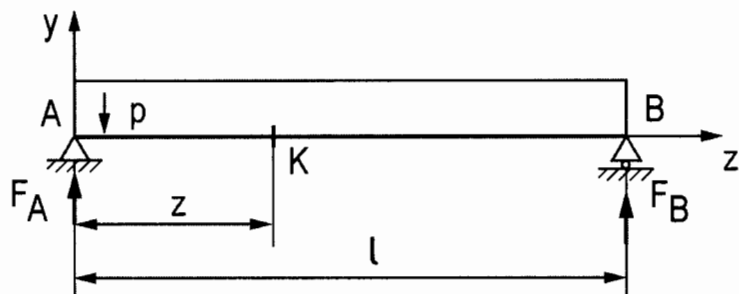
$$y'_{max} = \varphi_{max} = -\frac{Fl^2}{2I_x E}.$$

2.3.3.2. A kéttámaszú tartó alakváltozásainak meghatározása

A továbbiakban meghatározzuk a 29. ábrán látható csuklós megtámasztású, egyenletesen megoszló erőrendszerrel terhelt tartó maximális lehajlását és végkeresztmetszeteinek szögelfordulását ($I_x E$ állandó).

A tartó K-keresztmetszetében ébredő hajlító nyomaték értéke

$$M_{hx} = -F_A z + \frac{pz^2}{2} = -\frac{pl}{2} z + \frac{pz^2}{2} = \frac{p}{2} (z^2 - lz).$$



29. ábra
Egyenletesen megoszló erőrendszerrel terhelt tartó

A nyomaték függvényt a rugalmas szál differenciálegyenletébe helyettesítve az

$$y'' = -\frac{M_{hx}}{I_x E} = -\frac{p}{2I_x E} (z^2 - lz)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Integrálás után

$$y' = -\frac{p}{I_x E} \left(\frac{z^3}{6} - \frac{lz^2}{4} \right) + C_1$$

adódik, majd újbóli integrálás után a rugalmas szál egyenlete

$$y(z) = -\frac{p}{I_x E} \left(\frac{z^4}{24} - \frac{lz^3}{12} \right) + C_1 z + C_2.$$

A C_1 és C_2 állandók meghatározásához két peremfeltételre van szükségünk, melyek a következők: $z=0$ -nál illetve $z=l$ -nél a tartó lehajlása zérus $y(0)=0$, illetve $y(l)=0$. E peremfeltételekből $C_2=0$, illetve

$$C_1 = -\frac{pl^3}{24I_x E}$$

értékek adódnak. Behelyettesítés után a rugalmas szál egyenlete

$$y = -\frac{p}{I_x E} \left(\frac{z^4}{24} - \frac{lz^3}{12} + \frac{l^3 z}{24} \right).$$

A tartó közepén ($z=l/2$ helyen) a maximális lehajlás

$$y_{max} = -\frac{5pl^4}{384I_x E}.$$

A maximális szögelfordulás a tartóvégeken jön létre $z=0$ és $z=l$ helyen

$$y'_{max} = \varphi_A = -\frac{pl^3}{24I_x E}, \quad \text{illetve} \quad y'_{max} = \varphi_B = \frac{pl^3}{24I_x E}.$$

2.3.4. Változó keresztmetszetű hajlított tartók

A Navier-képlet kellő pontosságú eredményt ad olyan egyenes rudak esetén is, amelyeknek keresztmetszete változó, azonban a változás folytonos és mérsékelt. Mivel a hajlítónyomaték a rúd hossza mentén általában változó, ezért anyagmegtakarítás érdekében változó keresztmetszetű rudat célszerű készíteni. Változó keresztmetszettel készülnek az ún. egyenszilárdságú rudak. Az egyes keresztmetszetek méreteit úgy állapítjuk meg, hogy a keresztmetszet szélső szálában éppen a megengedett feszültség ébredjen. Vizsgálataink során a nyírás hatását elhanyagoljuk. Ha valamely tetszőleges keresztmetszetet $M_{hx}(z)$ hajlító nyomaték terheli, a keresztmetszet másodrendű nyomatéka a hajlítás tengelyére számítva $I_x(z)$, a szélső szál távolsága a hajlítás tengelyétől mérve $e_x(z)$, akkor az előbbi követelményt a

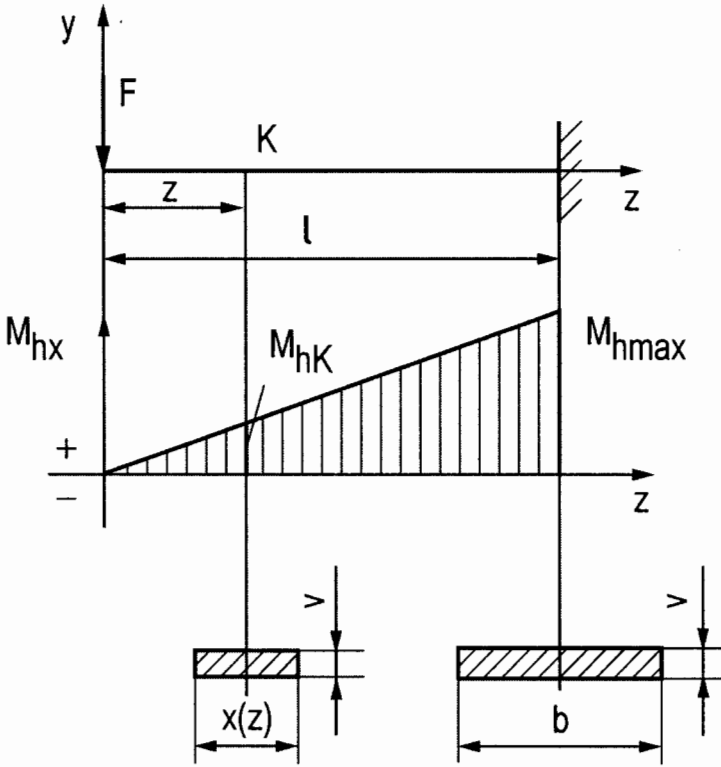
$$\sigma_{max} = \sigma_{meg} = \frac{M_{hx}(z)}{I_x(z)} e_x(z)$$

összefüggés elégíti ki. Az olyan rudat, melynek valamennyi keresztmetszetére érvényes az előbbi összefüggés *egyenszilárdságú rúdnak* nevezzük.

2.3.4.1. Állandó vastagságú, koncentrált erővel terhelt konzolos tartó

Megvizsgáljuk, hogy miként változik egy koncentrált erővel terhelt állandó vastagságú befogott rúd szélességi mérete a hossz mentén (30. ábra). A hajlítónyomaték a K-keresztmetszetben $M_{hx}(z)=Fz$, a másodrendű nyomaték

$$I_x(z) = \frac{x(z)v^3}{12}$$



30. ábra
Állandó vastagságú egyenszilárdságú tartó

és $e_x(z)=v/2$. A szélső szálban ébredő feszültség

$$\sigma_{max} = \sigma_{meg} = \frac{M_{hx}(z)}{I_x(z)} e_x(z) = \frac{6Fz}{x(z)v^2},$$

innen

$$x(z) = \frac{6F}{\sigma_{meg} v^2} z = K_0 z,$$

ahol K_0 állandó.

A kapott eredményből látható, hogy a tartó szélessége lineárisan növekszik a hossza mentén. A $z=l$ helyen jelöljük b -vel a szélességét, innen

$$b = \frac{6Fl}{\sigma_{meg} v^2}.$$

Az eredményből látható, hogy az állandó keresztmetszetű tartóhoz képest 50 %-os anyagmegtakarítást lehet elérni. Ha a nyírást is figyelembe vesszük, akkor a rúd vége nem lehet hegyes, hanem olyan szélességű kell, hogy legyen, ami nyírás szempontjából megfelel.

2.3.4.2. Állandó szélességű, koncentrált erővel terhelt konzolos tartó

A 31. ábrán látható állandó szélességű tartó magasságát minden egyes keresztmetszetben úgy választjuk meg, hogy teljesüljön az egyenszilárdsági feltétel.

Esetünkben $M_{hx}(z) = Fz$ és

$$K_x(z) = \frac{bh^2(z)}{6}.$$

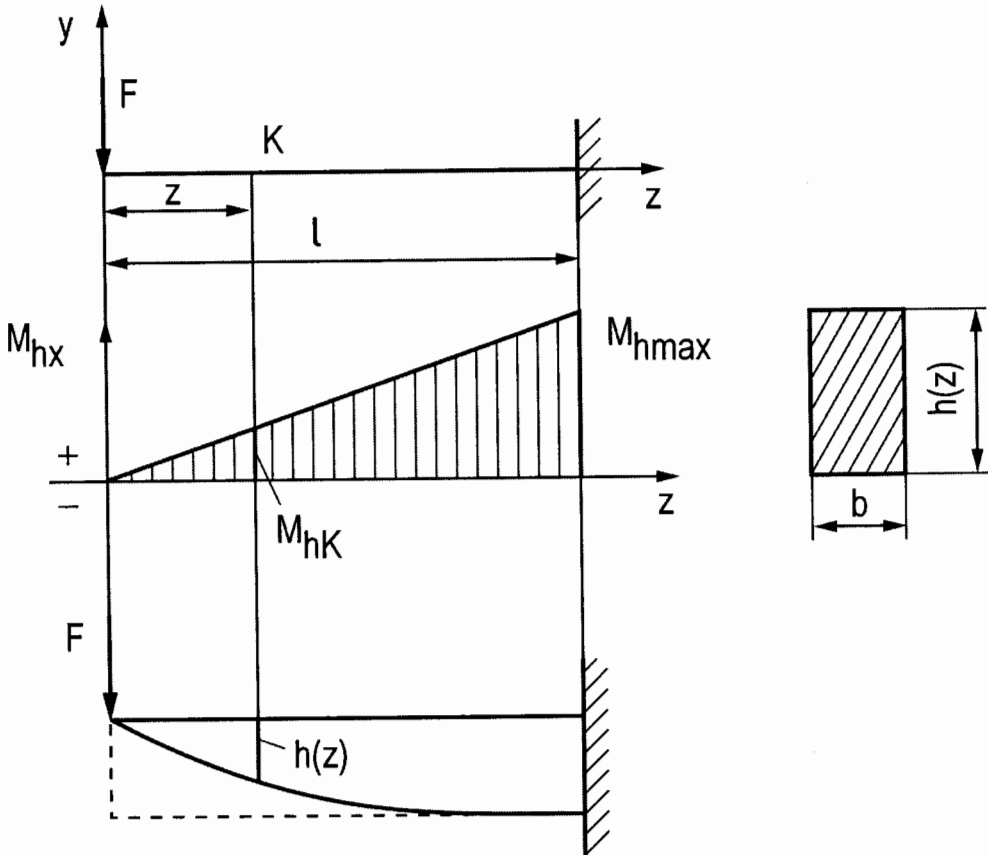
Az egyenszilárdság feltételéből kapjuk, hogy

$$\sigma_{max} = \sigma_{meg} = \frac{M_{hx}(z)}{K_x(z)} = \frac{6Fz}{bh^2(z)},$$

innen

$$h(z) = \sqrt{\frac{6F}{b\sigma_{meg}}}\sqrt{z} = K_1\sqrt{z},$$

ahol K_1 állandó.



31. ábra

Állandó szélességű egyenszilárdságú tartó

A befogás helyén a rúd magassága

$$h(l) = \sqrt{\frac{6Fl}{b\sigma_{meg}}}$$

Látható, hogy ilyen tartókialakítás esetén 33 %-os anyagmegtakarítás érhető el.

A továbbiakban vizsgáljuk meg, hogy miként változik az előbbi rúd sugara, ha kör keresztmetszetűre készítjük el. A keresztmetszeti tényező $K=r^3\pi/4$. Az egyenszilárdsági feltételbe helyettesítve adódik, hogy

$$\sigma_{max} = \sigma_{meg} = \frac{4Fz}{r^3\pi},$$

innen

$$r = r(z) = \sqrt[3]{\frac{4Fz}{\pi\sigma_{meg}}} = K_2 \sqrt[3]{z},$$

ahol K_2 állandó.

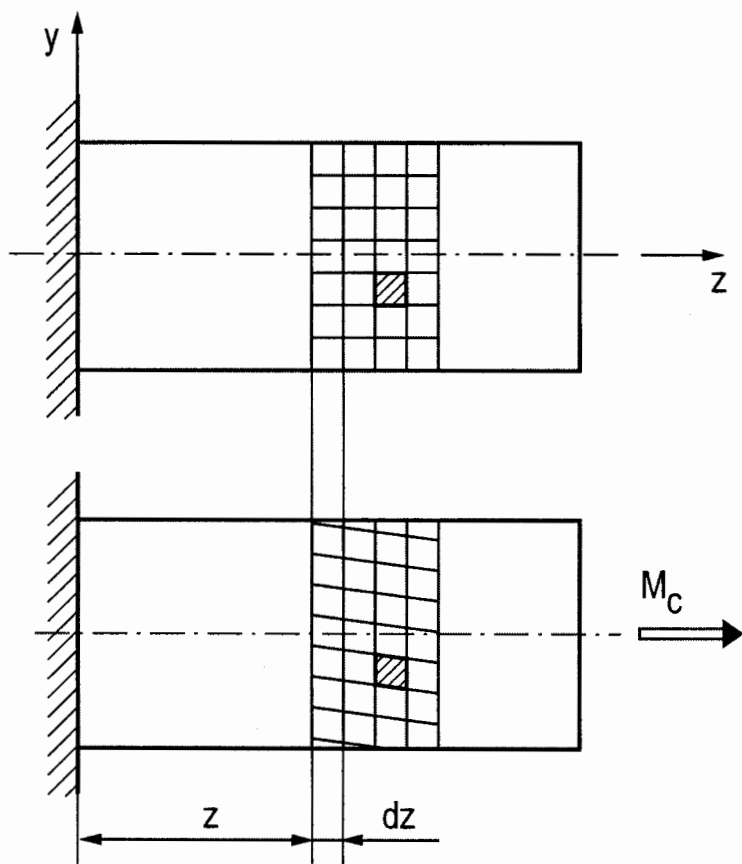
Látható, hogy egyenszilárdságú rudak esetén számottevő anyagmegtakarítás érhető el, de a gyártási költségük megnőhet. Emiatt gyártás előtt célszerű gazdaságossági számítást végezni.

2.4. A csavarás

2.4.1. A kör és körgyűrű keresztmetszetű egyenes rudak csavarása

Csavarással tetszőleges keresztmetszetű rudakat lehet terhelni, de az alábbiakban levezetett összefüggések csak kör és körgyűrű keresztmetszet esetén érvényesek. Amennyiben az egyenes tengelyű prizmatikus rudat olyan erőpárok terhelik, melyek síkja egybe esik a határoló keresztmetszetek síkjával, akkor a rúd tiszta csavarásra van igénybe véve. Tiszta csavarás esetén a rúd tengelye alakváltozás után is egyenes marad. A kör és körgyűrű keresztmetszetek a rúd tengelye körül elfordulnak, az alkotó viszont csavarvonallá torzul. A rúd tengelyére merőleges keresztmetszetek az alakváltozás után is síkok maradnak.

A csavarás hatására ébredő feszültségek meghatározása céljából vizsgáljuk meg a 32. ábrán látható tartót. A kör keresztmetszetű terheletlen tartó hengerpalástjára rajzoljunk a hossz tengelyével párhuzamos alkotókat illetve a véglapok területével párhuzamosan elhelyezkedő köröket. Csavarás hatására a hálózat eltorzul. A hálózat derékszögei is eltorzulnak és az alakváltozás hasonló mint nyírás esetén, ezért csúsztató feszültségek keletkezésére következtethetünk. A feszültségek sugár menti eloszlásának jellegére csak az alakváltozás vizsgálata alapján lehet következtetni. E célból ragadjunk ki egy dz hosszúságú rúdelemet a tartóból (33. ábra).



32. ábra

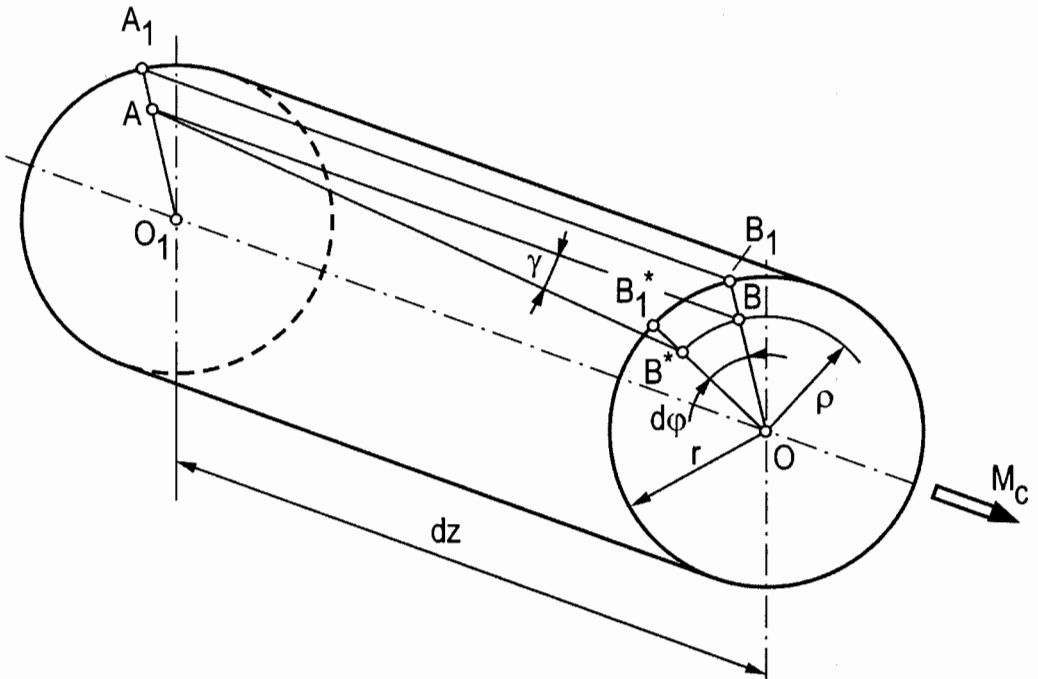
A kör keresztmetszetű rúd alakváltozása

Az $A_1 B_1$ alkotó két végpontját kössük össze a két véglap O_1 és O középpontjával. Ezután az OB_1 szakaszon az O középponttól ρ távolságra vegyünk fel egy B pontot. A rúdelem jobboldali végét az M_c erőpár terheli, a baloldali lapjára pedig olyan megoszló erőrendszer hat, melynek eredő nyomatéka megegyezik az M_c -vel. (A rúd baloldali végét úgy tekintjük, hogy egy falfelülethez van rögzítve). Csavarás hatására a B_1 pont az r sugarú körön $d\varphi$ szögelfordulással B_1^* helyzetbe kerül, míg a B pont a ρ sugarú körön B^* -ba mozdul el. A tartó baloldali (rögzített) végén az O_1 ponttól ρ távolságra levő A pont a helyén marad és e pontból a BB^* ív γ szög alatt látszik. Ezután felírhatjuk a BB^* ív hosszát

$$BB^* = \gamma dz = \rho d\varphi,$$

innen a szögtorzulás

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}.$$



33. ábra

Az elemi hosszúságú rúd alakváltozása

Az egyszerű Hooke-törvény alapján a τ feszültség

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dz}.$$

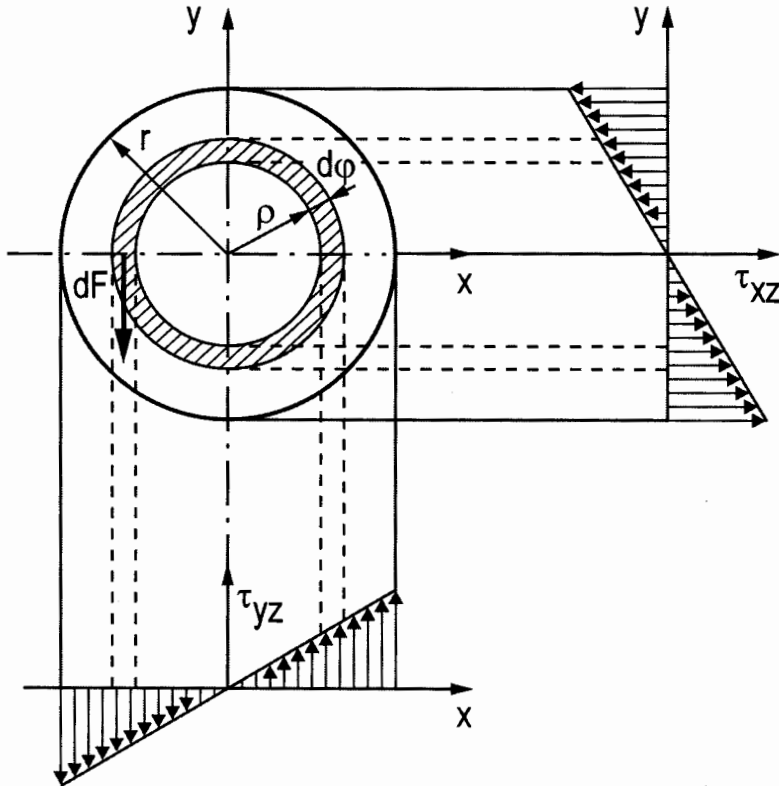
Könnyen belátható, hogy a $d\varphi/dz$ nem függ a sugártól, hanem állandó, így a τ feszültség a sugárral arányosan változik (34. ábra).

Az ábra alapján az elemi dF erő nyomatéka

$$dM_c = \rho dF = \rho \tau dA.$$

A 33. ábrán látható dz hosszúságú rúdelem egyensúlyát az alábbi egyenlet fejezi ki

$$M_c - \int_{(A)} \rho \tau dA = 0.$$



34. ábra

A csúsztató feszültségek változása a sugár függvényében

A csúszató feszültség értékének behelyettesítése után

$$M_c - \int_{(A)} G \rho^2 \frac{d\varphi}{dz} dA = 0$$

összefüggés adódik, melyből rendezés után kapjuk, hogy

$$M_c - G \frac{d\varphi}{dz} \int_{(A)} \rho^2 dA = 0.$$

A fenti összefüggésben az integrál értéke a poláris másodrendű nyomatékot adja, ezért

$$M_c - G \frac{d\varphi}{dz} I_p = 0.$$

A Hooke törvény alapján

$$\frac{\tau}{\rho} = G \frac{d\varphi}{dz},$$

melynek felhasználásával

$$\tau = \frac{M_c}{I_p} \rho.$$

Az összefüggés alapján a kör illetve körgyűrű keresztmetszet tetszőleges sugaránál meghatározható a csúszató feszültség értéke. A keresztmetszet középpontjában a τ értéke zérus, míg a kerülethez közeledve lineárisan növekszik. A keresztmetszet síkjában ébredő csúszatófeszültségek mindenhol merőlegesek a sugárra és érintik a keresztmetszet koncentrikus köreit. A maximális csúszató feszültség a $\rho=r$ helyen ébred

$$\tau_{max} = \frac{M_{cs}}{I_p} r$$

és a poláris keresztmetszeti tényező ($K_p = I_p/r$) behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$\tau_{max} = \frac{M_c}{K_p}.$$

Ellenőrzéskor a maximális feszültségnek kisebbnek kell lennie a megengedett értékénél.

$$\tau_{max} \leq \tau_{meg}.$$

Csavarás esetén a feszültségi állapot Mohr-köre megegyezik a tiszta nyírás Mohr-körével. Csavaró nyomaték hatására az egymástól dz távolságra levő vég-keresztmetszetek egymáshoz viszonyított szögelfordulása az egyensúlyi egyenlet alapján

$$d\varphi = \frac{M_c}{I_p G} dz.$$

Egy l hosszúságú rúd elcsavarodási szöge állandó csavaró nyomaték és csavarási merevség ($I_p G$ állandó) esetén

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_c}{I_p G} dz = \frac{M_c l}{I_p G}.$$

2.4.2. Vékony falú csövek csavarása

Vizsgáljuk meg a 35. ábrán látható vékony falú csövet, melyre egyik végén koncentrált M_c nyomaték hat a másik vége pedig falhoz van rögzítve. Vágjuk el gondolatban a csövet két részre. A részek egyensúlyát a belső erők biztosítják. A csőszelvények keresztmetszetén egyenletes feszültségeloszlást tételezünk fel. A gyűrűszerű keresztmetszet vetemedését nem akadályozzuk meg, így alkotó irányú feszültségek nem ébrednek, melynek következtében a rúd szabad csavarása viszonylag egyszerűen tárgyalható.

A gyűrűkeresztmetszeten ($A=2r\pi v$) ébredő közepes τ feszültségek eredője

$$T = A \tau = 2r\pi v \tau$$

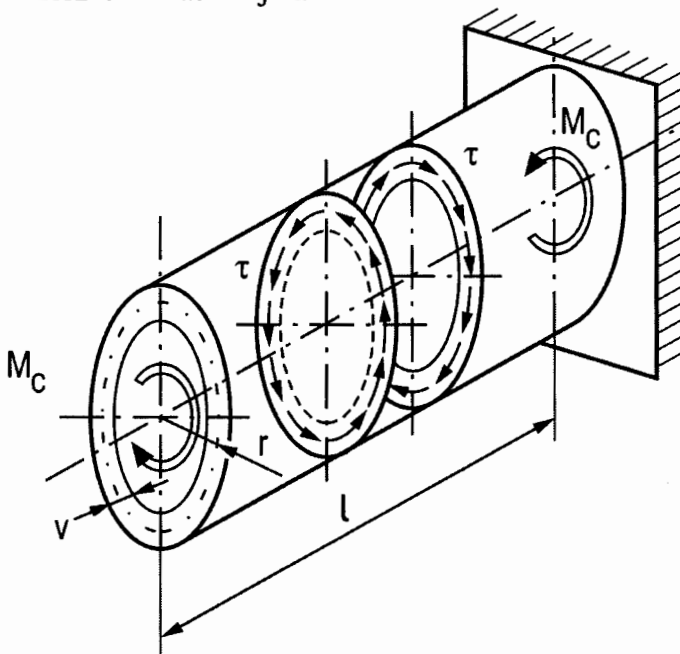
nagyságú erőt ad. A felénk eső rúd vég egyensúlyát a rúd tengelyére felírt egyensúlyi egyenlet fejezi ki

$$M_c = Tr = 2r^2\pi\tau v,$$

ahol az $r^2\pi$ nagyságú területet a gyűrű középvonala határolja és A_k -val jelöljük. Így a közepes csúsztatófeszültségek értékét a

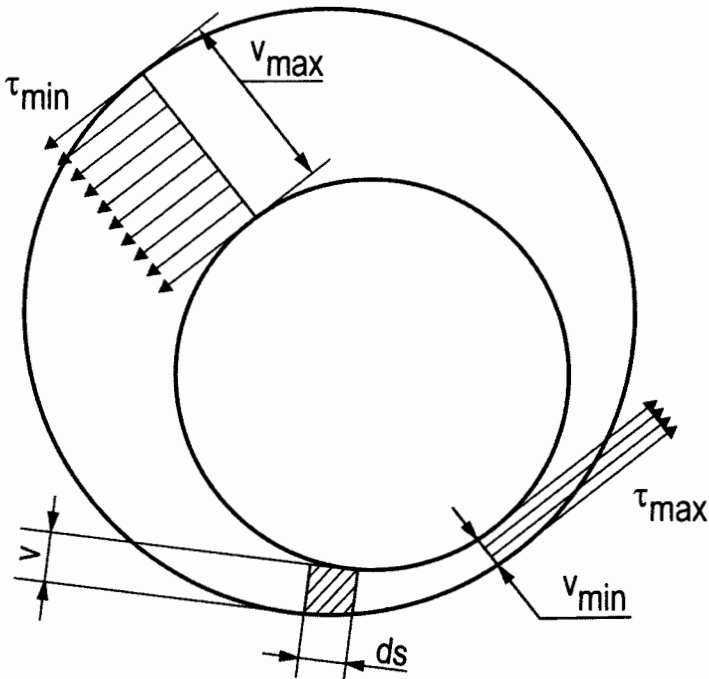
$$\tau = \frac{M_c}{2A_k v}$$

összefüggéssel lehet meghatározni, amit Bredt-féle képletnek nevezünk. A Bredt-képlettel nemcsak állandó, hanem változó falvastagságú zárt szelvényekben ébredő feszültségek is meghatározhatók (36. ábra). A legkisebb feszültség ott ébred, ahol a keresztmetszet a legvastagabb, a legnagyobb pedig ott, ahol legvékonyabb. A Bredt-képletet nagyon gyakran különböző szelvények bekötő varratainak ellenőrzésére használjuk.



35. ábra

Vékony falú csavart cső



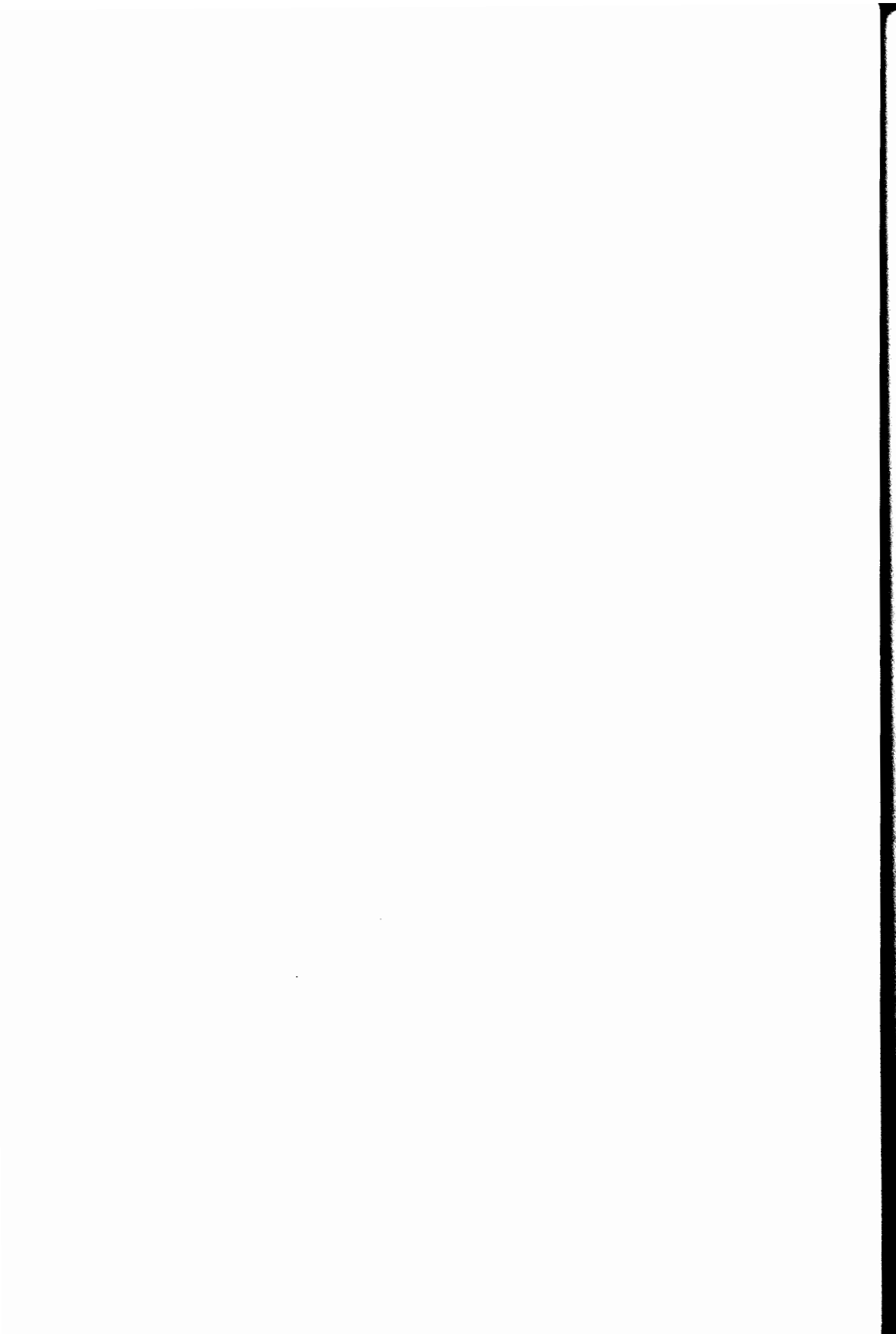
36. ábra

A csúsztatófeszültségek alakulása változó falvastagság esetén

Az M_c csavaró nyomatékkal terhelt l hosszúságú üreges rúd két végkeresztmetszetének egymáshoz viszonyított szögelfordulása (levezetés nélkül) az alábbiak szerint számítható

$$\varphi = \frac{M_c l}{4GA_k^2} \int \frac{ds}{v}$$

Amennyiben nem kör illetve körgyűrű keresztmetszetű rudakat csavarunk, akkor az összefüggések bonyolultabbá válnak.



3. A KIHAJLÁS

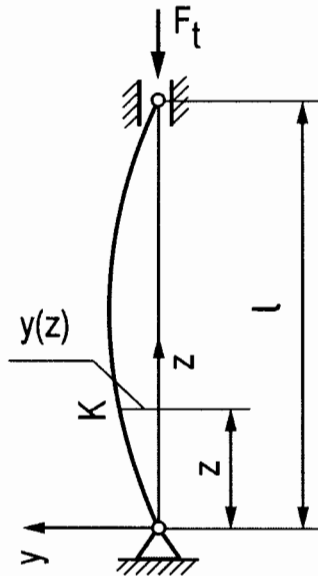
3.1. Karcsú, központosan nyomott rudak kihajlása

Ha a keresztmetszet méreteihez képest hosszú (karcsú) rudat a súlypontjában ható tengelyirányú és egyre növekvő erővel nyomunk, akkor a rúd bizonyos terhelés elérésekor kihajlik. Ebben az esetben azonban még a rúdban ébredő feszültség értéke kisebb, mint az arányossági határhoz σ_p tartozó érték. Ennek következtében a terhelés megszűnte után a rúd visszanyeri eredeti alakját és méreteit. Ismert, hogy a hosszú, egyenes vonalzó kihajlása a hosszabbik oldalára merőleges irányban következik be. E tapasztalati tény azt mutatja, hogy a rúd azon tengelye körül hajlik ki, melyre számított másodrendű nyomaték a legkisebb.

Azt az erőt, melynél a rúd kihajlik *kritikus erőnek* v. *törőerőnek* nevezzük. Az előbbieken alapján látható, hogy a karcsú rudak a zömök rudakhoz viszonyítva másként viselkednek, vagyis a rúd kihajlaskor nem azért megy tönkre, mert átléptük az anyagra megengedett feszültséghatárt, hanem azért, mert a rúd elveszíti stabil egyensúlyi alakját. A hosszú nyomott rudak vizsgálata a stabilitás témakörébe tartozik, ami a mechanikai problémák széles területét foglalja magában. A kihajlás lehet rugalmas és képlékeny. Rugalmas kihajlás esetén a nyomóerő hatására fellépő feszültség nem lépi át az arányossági határt, míg képlékeny kihajlaskor meghaladja azt.

A továbbiakban vizsgáljuk meg a 37. ábrán látható csuklós megtámasztású rudat, melyre éppen a kritikus F_k erő hat. Kiinduló helyzetben a rúd tökéletesen egyenes tengelyű és a rúdirányú nyomóerő a keresztmetszet súlypontjában támad.

A kihajolt rúd egyensúlyi alakjához tartozó rugalmas szál egyenlete kielégíti a probléma differenciálegyenletét.



37. ábra

A nyomott rúd kihajlása

A rúd a K-keresztmetszetben nyomásra és hajlításra van igénybe véve. A hajlító nyomaték értéke $M_{hx}=F_t y(z)$, amit behelyettesítünk a rugalmas szál differenciálegyenletébe

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = y'' = -\frac{M_{hx}}{I_x E} = -\frac{F_t}{I_x E} y,$$

innen

$$y'' + \frac{F_t}{I_x E} y = 0.$$

Vezessük be az

$$\alpha^2 = \frac{F_t}{I_x E}$$

jelölést, így az

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

homogén, lineáris másodrendű differenciálegyenletet kapjuk, melynek általános megoldása

$$y(z) = A \sin(\alpha z) + B \cos(\alpha z).$$

Az A és B állandók értéke a rúdvégek megfogásától az ún. peremfeltételektől függ. A tartó elmozdulása a $z=0$ helyen $y=0$, ezért $B=0$ és

$$y = A \sin(\alpha z),$$

vagyis a rúd kihajlott alakja szinuszfüggvénnyel írható le. A tartó másik végén a $z=l$ helyen is az y irányú elmozdulás zérus, ezért

$$0 = A \sin(\alpha l).$$

A fenti egyenlet kétféleképpen teljesülhet, ha $A=0$ illetve, ha $\sin(\alpha l)=0$. Az $A=0$ érték nem jöhet szóba, mert ebben az esetben a tartó bármely keresztmetszetében $y=0$, tehát nincs kihajlás. Számunkra a

$$\sin(\alpha l) = 0$$

megoldás érdekes, amikor

$$\alpha l = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$$

A fenti megoldások közül gyakorlati szempontból csak az $n=1$ esetnek van jelentősége. Innen

$$\alpha = \frac{\pi}{l}.$$

Mint említettük a kihajlás a legkisebb másodrendű nyomatékot adó tengelyre merőlegesen történik ($I_x = I_{min} = I_z$), ezért

$$\alpha^2 = \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{F_t}{I_2 E},$$

melyből

$$F_t = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 I_2 E$$

az ún. kritikus erő vagy törőerő. Ezt az összefüggést először Euler vezette le, ezért Euler-képletnek is nevezik. Amennyiben a rudat az F_t kritikus erő centrikusan terheli, akkor a rúdnak végtelen sok egyensúlyi alakja lesz, vagyis egyensúlyi helyzete közömbös. Ez azt jelenti, hogy ekkor a rúd a legkisebb külső erő hatásakor kihajlik, szinuszgörbe alakot vesz fel és a külső terhelés megszűnte után nem nyeri vissza eredeti alakját, hanem meggömbülten tartja az F_t erőt. Ily módon tehát három esetet különböztetünk meg

ha $F < F_t$, akkor a rúd *stabilis*,

ha $F = F_t$, akkor a rúd *közömbös*,

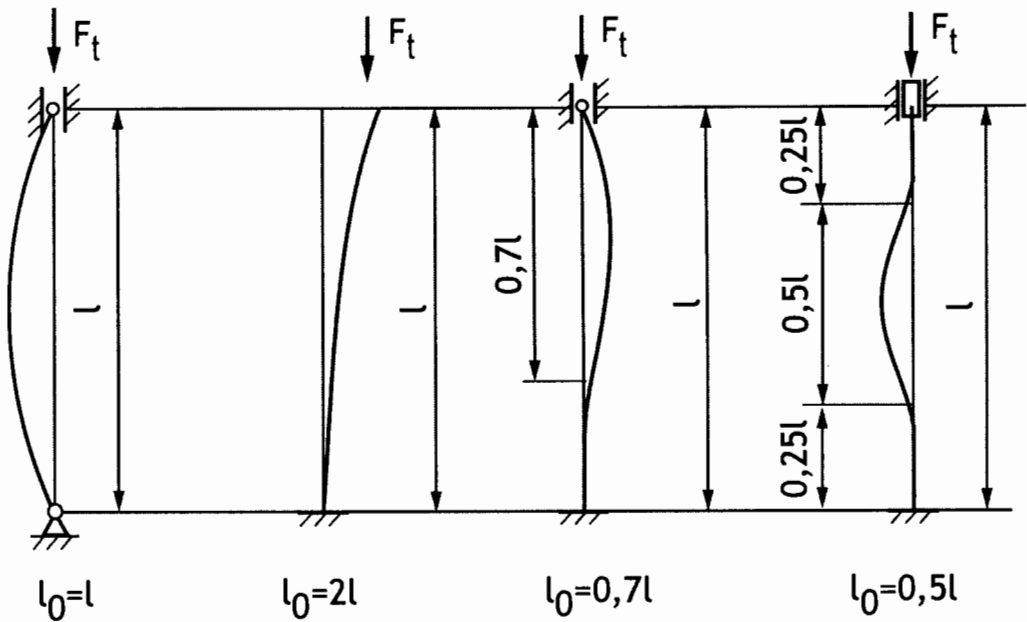
ha $F > F_t$, akkor a rúd *labilis*

egyensúlyi helyzetben van.

Az Euler-képlet csak tökéletesen egyenes tengelyű, homogén és súlypontjában terhelt rudak esetén érvényes. A kezdeti alakpontatlanságok, az inhomogenitás, az előforduló hegesztési feszültségek stb. módosítják a kritikus terhelés értékét.

A kritikus erő értéke a rúdvégék megfogásától vagyis a peremfeltételektől függ. A pontos értéket a differenciálegyenlet megoldása révén lehet meghatározni. Gyakorlati alkalmazás érdekében négy alapesetet szokás megkülönböztetni. A rúd kihajló hosszának l_0 bevezetésével az egyes eseteket vissza lehet vezetni az Euler-féle képletre a 38. ábra szerint. A kihajló hossz a kihajlott rúd inflexiós pontjainak távolságából adódik. Ennek megfelelően a törőerő értéke

$$F_t = \left(\frac{\pi}{l_o} \right)^2 I_2 E.$$



38. ábra

Nyomott rudak kihajló hossza

Gyakorlati feladatok megoldásakor általában a kritikus vagy törőfeszültséggel számolunk. Ennek érdekében használjuk fel a statikában tanult

$$I_2 = i_2^2 A$$

összefüggést, így

$$F_t = \left(\frac{\pi}{l_o} \right)^2 i_2^2 AE = \pi^2 \frac{AE}{\left(\frac{l_o}{i_2} \right)^2}.$$

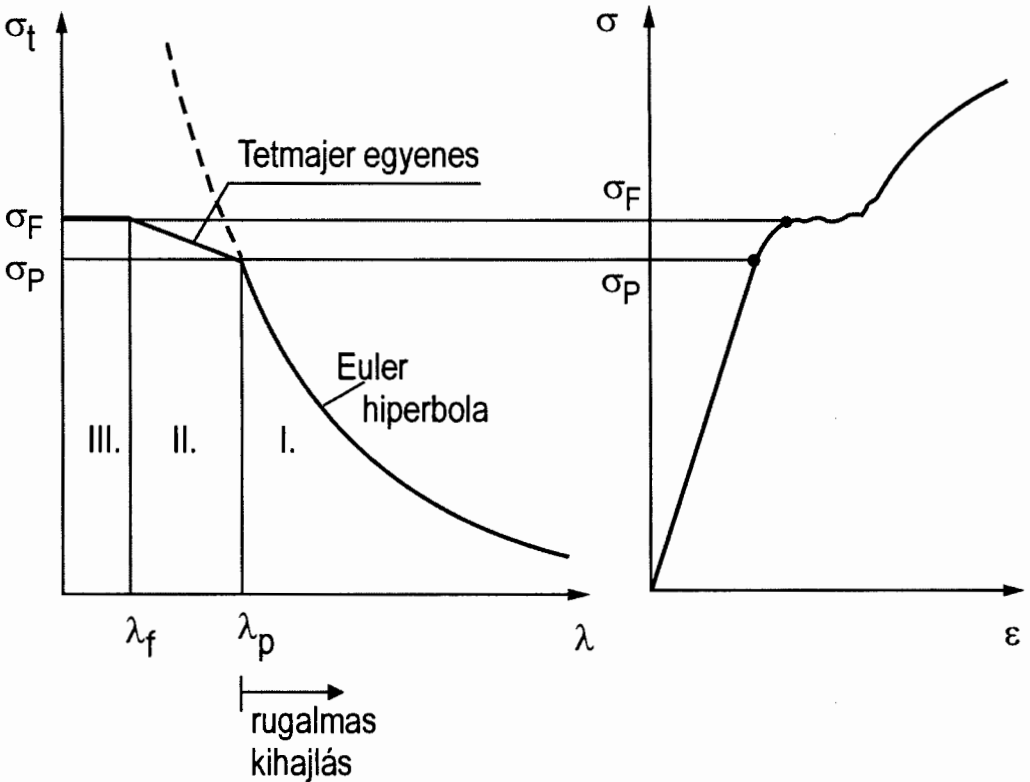
Az $l_o/i_2 = l_o/i_{min} = \lambda$ értéket a rúd karcsúságának nevezünk. Az F_t erő ismeretében számítható a kritikus vagy törőfeszültség

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A},$$

amiből

$$\sigma_t = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

érték adódik. Ha a kapott egyenletet $\sigma_t - \lambda$ koordinátarendszerben ábrázoljuk, akkor az ún. Euler-hiperbolát kapjuk (39. ábra).



39. ábra

A $\sigma_t - \lambda$ stabilitási diagram

Az Euler-képletet csak az arányossági határig lehet alkalmazni. A szerkezetekben azonban kialakulnak képlékeny alakváltozások is, emiatt szükségessé

vált az arányossági határon túli terület vizsgálata. A kísérleti eredmények ezen a területen szórást mutatnak. Az anyag viselkedésének leírására különböző elméleteket dolgoztak ki. Az egyik általánosan elterjedt összefüggés felírása Tetmajer Lajos (1850–1905) nevéhez fűződik. Tetmajer kísérleti eredményei alapján acélra a

$$\sigma_t = a - b\lambda$$

lineáris összefüggést fogalmazta meg, ahol a és b állandók (acél esetén $a=308$ MPa és $b=1,14$ MPa). A Tetmajer-egyenes az Euler-hiperbolát a λ_p pontban metszi, melynek értéke

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

A Tetmajer-egyenes λ_f értéknél eléri a folyáshatárt és $\lambda < \lambda_f$ esetén a $\sigma_t = \sigma_F = \text{állandó}$.

Ötöttvas esetén a Tetmajer-egyenes másodfokú parabola

$$\sigma_t = a - b\lambda + c\lambda^2.$$

Nyomott rudak méretezését az ún. kihajlás szempontjából megengedhető σ_k feszültség alapján lehet elvégezni

$$\sigma_k = \frac{\sigma_t}{n},$$

ahol n a biztonsági tényező.

4. EGYIRÁNYÚ ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEK

Ha a külső terhelések hatására az egyes keresztmetszetekben csak normál σ vagy csak csúsztató τ feszültségek ébrednek, akkor ezek egyirányú összetett igénybevételt eredményeznek és a feszültségek értékét algebrailag összegezni lehet.

Egyirányú összetett igénybevétel jön létre, ha

- húzás és hajlítás,
- nyomás és hajlítás,
- ferde hajlítás,
- nyírás és csavarás

együttesen lép fel. Ezekben az esetekben az ellenőrzést (a méretezést) úgy végezzük el, hogy a feszültségek maximumát (algebrai összegét) összehasonlítjuk a megengedett feszültséggel

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{meg},$$

illetve

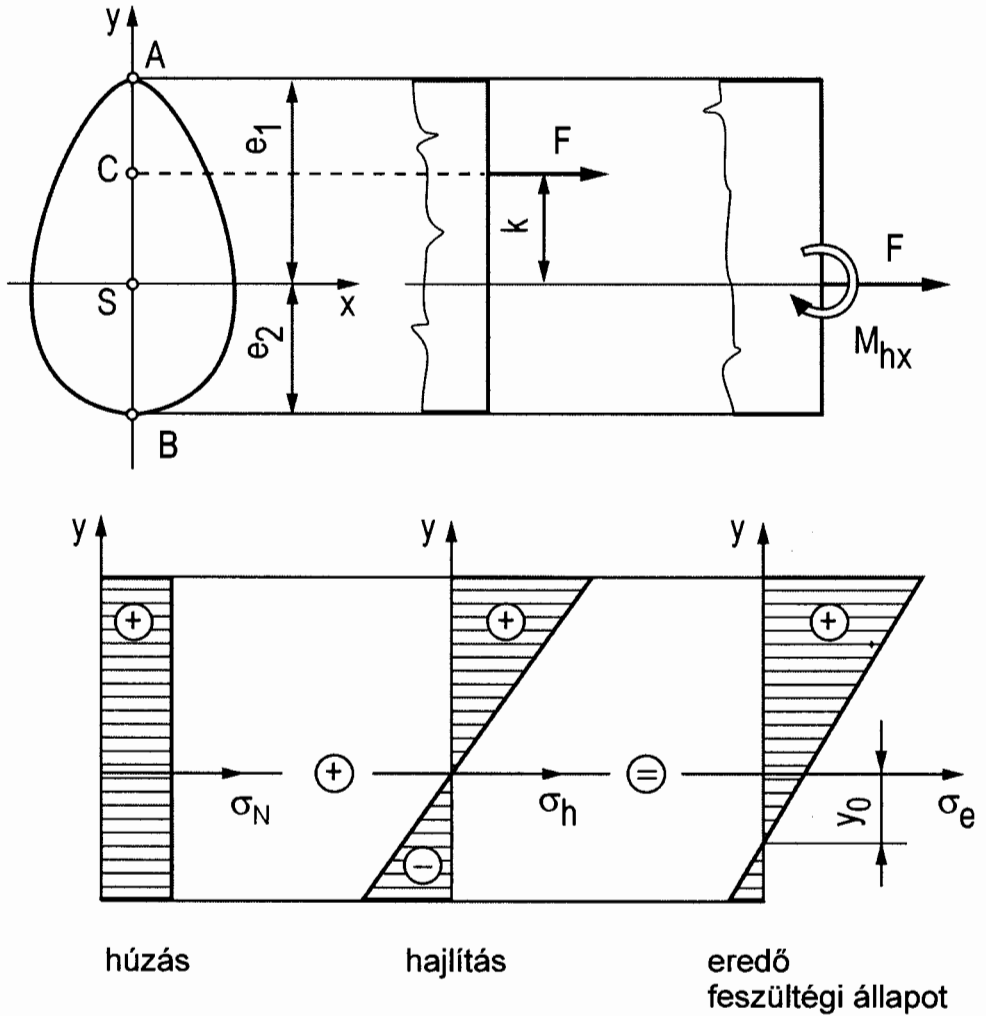
$$\tau_{max} \leq \tau_{meg}.$$

4.1. Húzás és hajlítás

Ez az igénybevétel a 40. ábra szerint úgy jön létre, hogy

- a) keresztmetszet síkjára merőleges erő nem a keresztmetszet súlypontjában támad, de metszi a keresztmetszet egyik főtengelyét;

- b) a húzóerő a keresztmetszet súlypontjában támad és a súlyponti tengely körül hajlítónyomaték is hat.



40. ábra
Feszülésgeloszlás húzás és hajlítás esetén

A továbbiakban a 40. ábrán látható szimmetrikus tartó keresztmetszetében ébredő feszültségeket határozzuk meg. Mivel a feszültségek húzásából és

hajlításból származnak, ezért eredőjükét a szuperpozíció elve alapján összegzéssel meg lehet határozni. A súlypontba redukált vektorkettős

$$F_S = F, \quad \text{illetve} \quad M_S = M_{hx} = Fk.$$

A húzásból származó normálfeszültség

$$\sigma_N = \frac{F}{A},$$

az egyenes hajlításból származó normálfeszültség

$$\sigma_h = \frac{M_{hx}}{I_x} y.$$

Az eredő feszültség

$$\sigma_e = \frac{F}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y.$$

A 40. ábráról látható, hogy a legnagyobb húzófeszültség az A pontban ébred, értéke

$$\sigma_A = \frac{F}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} e_1,$$

a legnagyobb nyomófeszültség B pontban

$$\sigma_B = \frac{F}{A} - \frac{M_{hx}}{I_x} e_2.$$

Esetünkben a hajlítás tengelye és a semleges tengely nem esik egybe, hanem y_0 távolságra vannak egymástól. Ezen érték meghatározásakor abból a feltételéből indulunk ki, hogy a semleges tengely mentén az eredő feszültség zérus

$$\sigma_e = 0 = \frac{F}{A} - \frac{M_{hx}}{I_x} y_o,$$

innen

$$\frac{F}{A} = \frac{Fk}{I_x} y_o.$$

Mivel $I_x = i_x^2 A$, ezért

$$\frac{F}{A} = \frac{Fk}{i_x^2 A} y_o,$$

majd egyszerűsítés után

$$i_x^2 = ky_o.$$

Látható, hogy a semleges tengely y_o helyzete csak a keresztmetszet geometriai méreteitől (i_x), valamint az erő támadáspontjától y_o függ, de független az erő nagyságától.

4.2. Nyomás és hajlítás

A nyomás és hajlítás az előbbieken tárgyalt húzás és hajlítástól csupán előjelben tér el. Vizsgálatainkat olyan zömök rudakra korlátozzuk, melyeknél nem lép fel kihajlás. A nyomás és hajlítás együttes igénybevétele szintén kétféleképpen jöhet létre. A 41. ábra szerint a nyomófeszültség

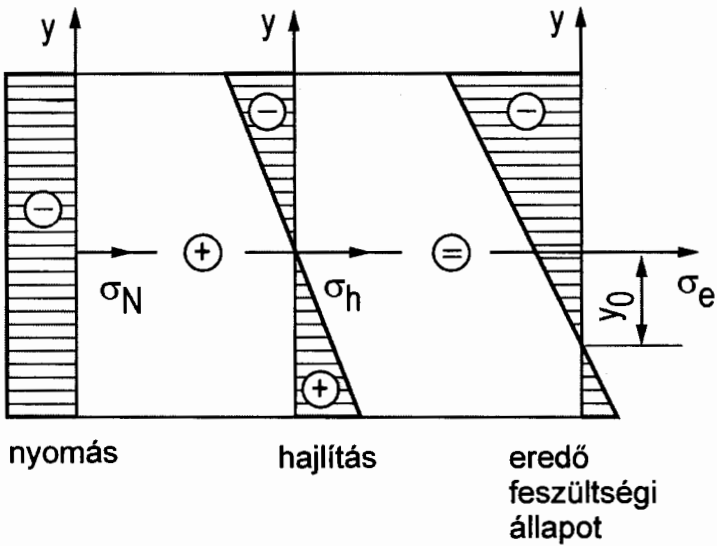
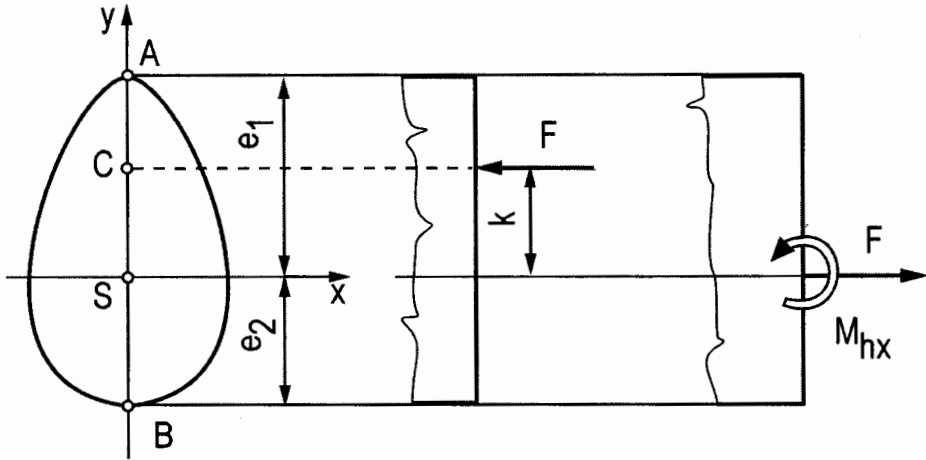
$$\sigma_N = -\frac{F}{A},$$

a hajlítófeszültség

$$\sigma_h = -\frac{M_{hx}}{I_x} y.$$

Az eredő feszültség

$$\sigma_e = \sigma_N + \sigma_h = -\frac{F}{A} - \frac{M}{I_x} y.$$



41. ábra

Feszültségeloszlás nyomás és hajlítás esetén

A semleges tengely helyét a

$$\sigma_e = 0 = -\frac{F}{A} + \frac{Fk}{I_x} y_0$$

összefüggésből határozzuk meg. Az előző fejezethez hasonlóan

$$i_x^2 = ky_o,$$

ahonnan a semleges tengely y_o helyzete számítható.

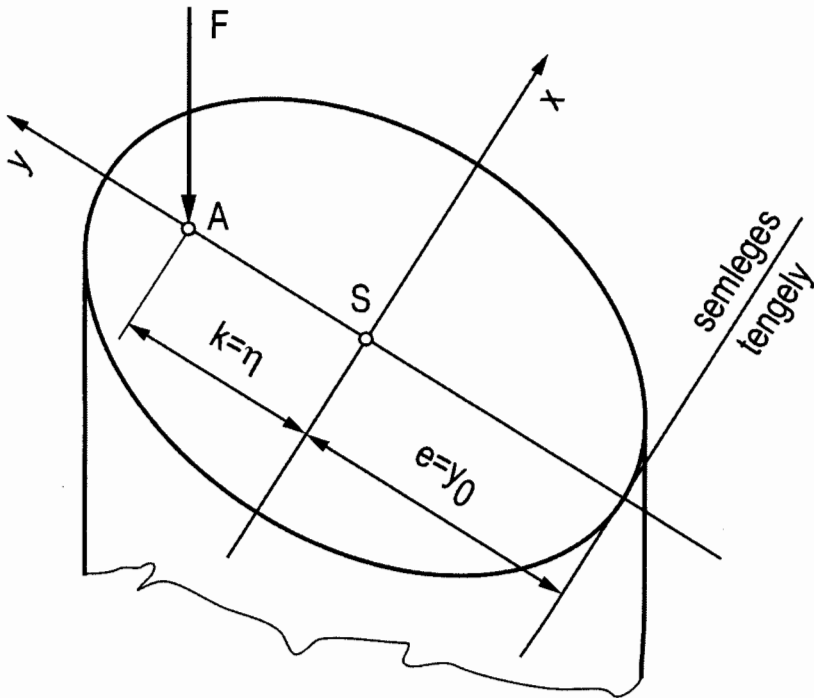
4.3. A keresztmetszet belső magidoma

Az előbbieken láttuk, hogy külpontos húzás vagy nyomás esetén a keresztmetszetben kétféle előjelű feszültségek jöhetnek létre annak ellenére, hogy csak húzó vagy csak nyomó terhelés hat. Mivel sok anyag a húzó és nyomó feszültségek hatásakor másként viselkedik (például a betont, az öntöttvasat nem célszerű nagy húzó igénybevétellel terhelni, ellenben a nyomást jól elviselik), ezért a továbbiakban megkeressük a normál erőnek azt a támadáspontját, amikor a keresztmetszetben csak azonos előjelű normál feszültségek ébrednek. A különböző előjelű feszültségeket a semleges tengely választja el egymástól, ezért a 42. ábra szerint az y -tengely mentén az F erő A támadáspontját úgy határozzuk meg, hogy a semleges tengely érintse a keresztmetszet kontúráját. Ebben a helyzetben a keresztmetszet minden egyes pontjában azonos előjelű feszültségek ébrednek. Ha az F erő támadáspontjának ezen határhelyezeteit minden egyes súlyponti tengely mentén megkeressük és a kapott támadáspontokat összekötjük, akkor a dőféspontok a súlypont körül egy területrészt határoznak, melyet a keresztmetszet magidomának nevezünk. Mindaddig, amíg a húzó- vagy nyomóerő támadáspontja a magidomon belül helyezkedik el, addig a teljes keresztmetszetben csak húzó vagy csak nyomó feszültségek ébrednek. A magidom ismeretének gépalapozások méretezésénél fontos szerepe van, mert az a cél, hogy az alapon ne ébredjenek húzó feszültségek.

A semleges szál y_o helyzetének számítására ugyanaz az összefüggés érvényes mind húzás, mind nyomás esetén $i_x^2 = ky_o$. Amikor valamely súlyponti tengely mentén meghatározzuk az F erő azon dőféspontját, amikor a semleges tengely érinti a keresztmetszet kontúráját, akkor ebben a speciális helyzetben jelöljük az F erő és a súlypont távolságát $k=\eta$ -val, a súlypont és a kontúr távolságát $y_o=e$ -

vel és az i_x -et általánosan i -vel. Így az alábbi összefüggést kapjuk a magidom számítására

$$\eta = \frac{i^2}{e}$$



42. ábra

A magidom meghatározása

Ezután számítsuk ki néhány gyakran előforduló keresztmetszet magidomát.

a) A téglalap magidoma

A számításához szükség van az inerciasugárra, továbbá a súlyponti tengely és a szélső szál távolságára.

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{ab^3}{12ab} = \frac{b^2}{12}, \quad \text{illetve} \quad e_x = \frac{b}{2},$$

innen

$$\eta_x = \frac{i_x^2}{e_x} = \frac{\frac{b^2}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{b}{6}.$$

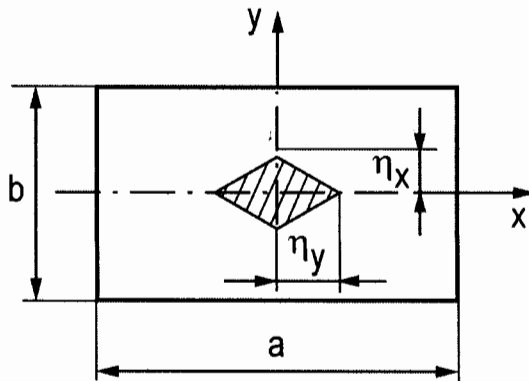
Hasonlóképpen

$$\eta_y = \frac{a}{6}.$$

Ezen értékek ismeretében a 43. ábrán a vonalkázott terület megadja a keresztmetszet magidomát.

Négyzet ($a=a$) esetén ugyanígy lehet meghatározni a magidom méretét és ebben az esetben

$$\eta_x = \eta_y = a/6.$$



43. ábra

A téglalap keresztmetszet magidoma

b) A kör keresztmetszet magidoma

A 44. ábrán látható körlap magidomának meghatározásához szükséges inerciasugár

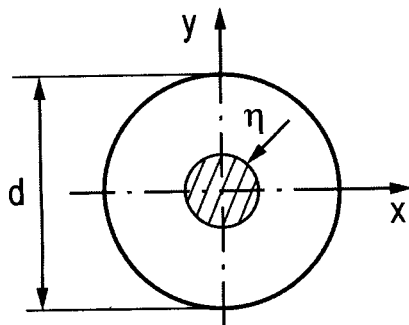
$$i_x^2 = i_y^2 = i^2 = \frac{I}{A} = \frac{d^4 \pi}{64} \cdot \frac{4}{d^2 \pi} = \frac{d^2}{16}$$

és a szélső szál távolsága

$$e_x = e_y = e = \frac{d}{2}.$$

A magidom sugara

$$\eta = \frac{i^2}{e} = \frac{d^2}{16} \cdot \frac{2}{d} = \frac{d}{8}.$$



44. ábra

A kör keresztmetszet magidoma

c) A körgyűrű keresztmetszet magidoma

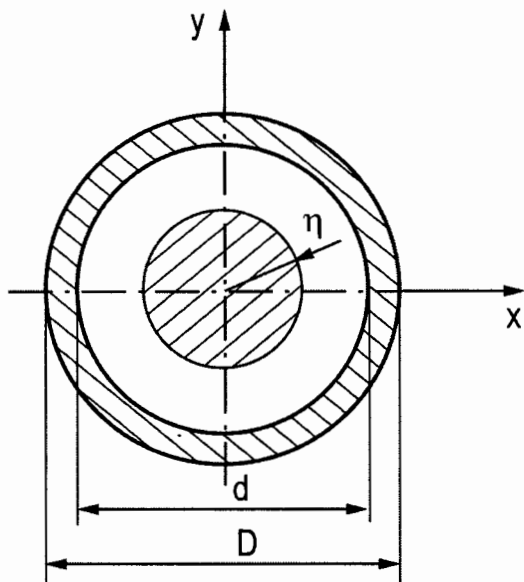
A magidom meghatározásához szükséges inerciasugár és a szélső szál távolsága (45. ábra)

$$I_x = I_y = I = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{64},$$

$$i_x^2 = i_y^2 = i^2 = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \frac{4}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{D^2 + d^2}{16}$$

és

$$e_x = e_y = e = \frac{D}{2}.$$



45. ábra
A körgyűrű keresztmetszet magidomja

A magidom sugara

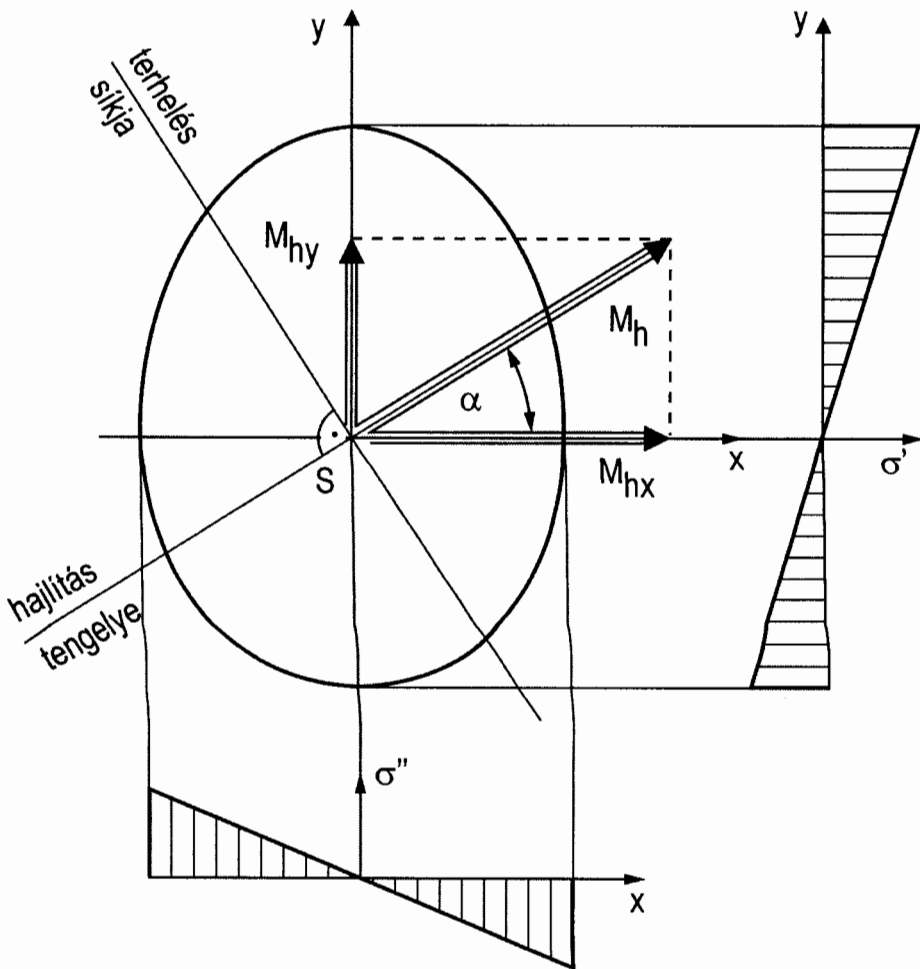
$$\eta = \frac{i^2}{e} = \frac{D^2 + d^2}{8D}.$$

Üreges szelvények magidomát hasonló módon lehet meghatározni, vagyis a másodrendű nyomatékok számításakor tanultak szerint az üres rész nem szerepel a másodrendű nyomaték képletében. Szabványos szelvények magidoma kézikönyvekben is megtalálható.

4.4. A ferde hajlítás

Ferde hajlítás esetén a hajlító nyomaték vektora nem párhuzamos a keresztmetszet egyik tehetetlenségi főirányával sem. A tehetetlenségi főirányok megkeresése szimmetrikus keresztmetszeteknél egyszerű, de általános keresztmetszeteknél számításokat igényel és csak a főirányok meghatározása után lehet eldönteni, hogy egyenes vagy ferde hajlítással állunk szemben. Az egyszerűbb

tárgyalásmód érdekében a ferde hajlítást olyan keresztmetszet kapcsán tárgyaljuk, melynek legalább egy szimmetriatengelye van (46. ábra). A súlyponti x-tengely és az y-tengely tehetetlenségi főtengetyek. Az ábra szerint a ferde hajlítást az x tengellyel α szöget bezáró M_h hajlító nyomaték okozza, melynek komponensei az M_{hx} és M_{hy} . Az egyenes hajlításhoz hasonlóan a terhelés síkja átmegy a súlyponton és merőleges az M_h vektorára. A hajlítás tengelye pedig egybeesik a hajlító nyomaték vektorával és átmegy a keresztmetszet súlypontján.



46. ábra
A ferde hajlítás értelmezése

A továbbiakban a ferde hajlítást az x és y -tengely körüli egyenes hajlításra vezetjük vissza

$$M_{hx} = M_h \cos \alpha,$$

$$M_{hy} = M_h \sin \alpha.$$

A Navier-képlet felhasználásával az y -tengely menti hajlításból származó normál feszültségek a

$$\sigma' = \frac{M_{hx}}{I_x} y$$

összefüggés alapján számíthatók. Látható, hogy az y távolság előjele megegyezik a hajlításból származó feszültségek előjelével.

Az x -tengely körüli hajlításból származó feszültségeket a

$$\sigma'' = -\frac{M_{hy}}{I_y} x$$

képlet alapján lehet számítani. A negatív előjel amiatt van, hogy pozitív x értéknél negatív (nyomó) feszültségek ébrednek és fordítva.

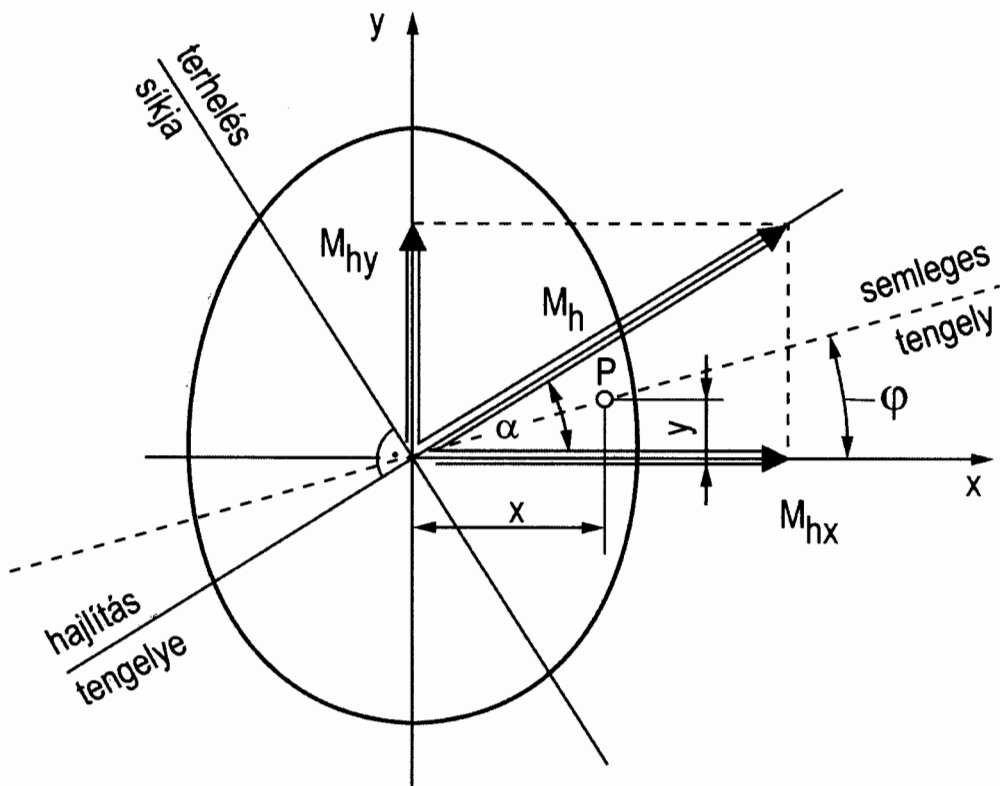
Az eredő feszültség a két tengely körüli egyenes hajlításból származó feszültségek algebrai összegeként adódik

$$\sigma_e = \frac{M_{hx}}{I_x} y - \frac{M_{hy}}{I_y} x.$$

Skaláris tárgyalásmód esetén ügyelni kell a nyomatékköszetevők (M_{hx} és M_{hy}) által okozott feszültségek előjelére.

Ha az eredő feszültségeket a keresztmetszet minden egyes pontjában meghatározzuk és értéküket a keresztmetszet síkjára merőleges vektorként ábrázoljuk, akkor végpontjaik ugyanúgy, mint egyenes hajlításnál egy síkon fekszenek. E síknak a keresztmetszet síkjával való metszéspontja meghatározza a semleges tengelyt, melynek mentén nem ébred feszültség $\sigma_e = 0$. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a semleges tengely és a hajlítás tengelye ferde hajlításkor egybe

esik-e vagy sem. Eddigi ismereteink alapján azt tudjuk csak, hogy egyenes hajlításkor a hajlítás tengelye és a semleges tengely egybe esik. A 47. ábrát felhasználva feltételezzük, hogy a két tengely nem esik egybe, vagyis a hajlítás tengelyének az x-tengellyel bezárt szögét α -val, a semleges tengelynek az x-tengellyel bezárt szögét φ -vel jelöljük.



47. ábra

A semleges tengely és a hajlítás tengelyének elhelyezkedése

A semleges tengely mentén a feszültség zérus

$$\sigma_e = 0 = \frac{M_{hx}}{I_x} y - \frac{M_{hy}}{I_y} x.$$

A semleges tengelyen vegyünk fel egy P pontot, melynek koordinátáit jelöljük x -szel és y -nal. Az előbbi egyenletet felhasználva 47. ábra alapján írhatjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{I_x}{I_y} \frac{M_{hy}}{M_{hx}} = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha.$$

Az összefüggésből látható, hogy ferde hajlításkor a semleges tengely és a hajlítás tengelye általában nem esik egybe az egybeesés csak $I_x=I_y$ esetén teljesül.

5. TÖBBIRÁNYÚ ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEK

Ha a külső terhelés hatására normál és csúsztatófeszültségek (σ és τ) is ébred, akkor a rúd többirányú összetett igénybevételt szenved. A többirányú összetett igénybevételek az alábbi egyszerű igénybevételek együttes hatásakor keletkeznek:

- húzás (nyomás) és nyírás,
- húzás (nyomás) és csavarás,
- hajlítás és nyírás,
- hajlítás és csavarás.

Ebben az esetben valamilyen feszültségelmélettel meg kell határozni a redukált feszültséget, ami a vizsgált feszültségállapottal azonos veszélyességű egytengelyű feszültségállapotot jelent és ezt össze kell hasonlítani a megengedett értékkel

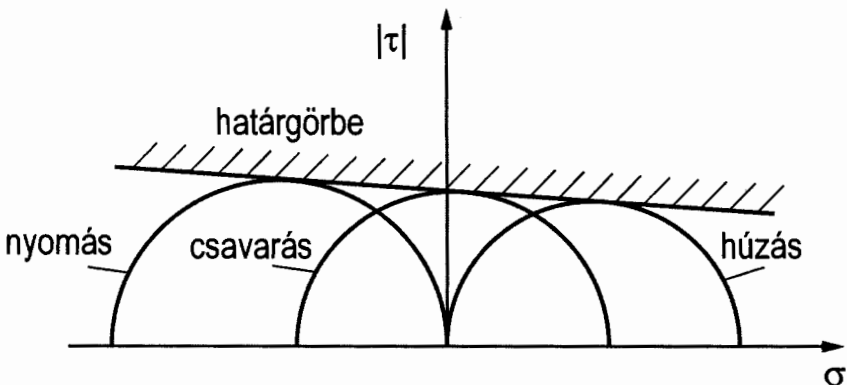
$$\sigma_{red} \leq \sigma_{meg}$$

Amennyiben több pont bizonyul veszélyesnek, akkor valamennyi pontban meg kell határozni a redukált feszültséget és közülük kell kiválasztani a legnagyobbat. Ebben az esetben tehát feszültségcsúcsra történő ellenőrzésről beszélünk. A fentiekből látható, hogy feszültségcsúcsra méretezéskor a szerkezet anyaga nincs kihasználva, mivel a feszültség csak bizonyos pontokban éri el a megengedett értéket.

A legfőbb nehézséget a redukált feszültség meghatározása jelenti. A redukált feszültség számítása terén számos elméleti illetve kísérleti munka született, de ezek nem vezettek teljesen azonos eredményre. A kutatók a valóságot több oldalról igyekeztek megközelíteni, különböző modelleket alkottak és ebből származik az eltérés. Az elméletek közül legjobban a Mohr-elmélet és a Huber-Mises-Hencky-elmélet terjedt el, ezért e két elméletet ismertetjük.

5.1. A Mohr-elmélet

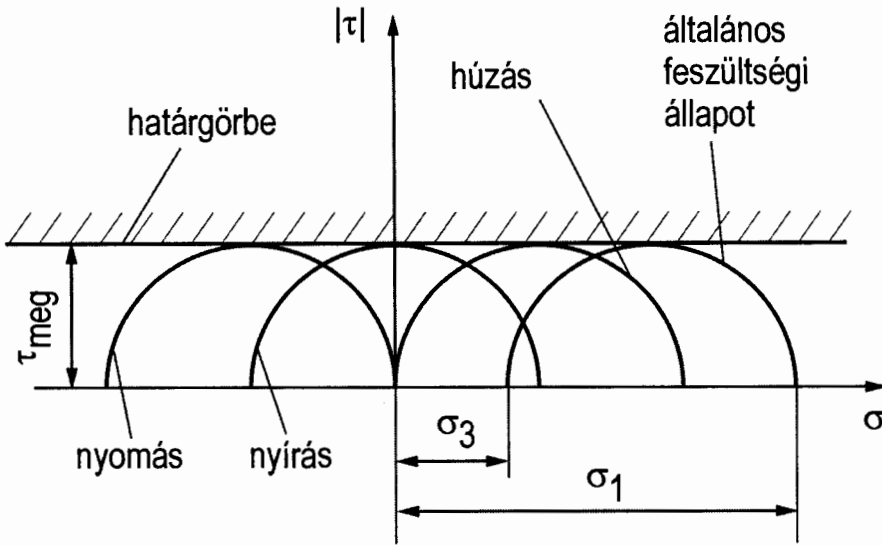
A Mohr-féle elmélet azon alapszik, hogy terhelés hatására az anyagban csúszás jön létre, de a szakadás nem következik be. Mohr kísérleti vizsgálatai során a maradó alakváltozásig (elcsúszásig) növelte a terhelést és így határozta meg a feszültségi állapotot. Az anyagot ennek megfelelően különböző igénybevétellel (húzó, nyomó, csavaró stb.) addig terhelte, amíg valamely síkban éppen csúszás nem lépett fel és ezeknek a feszültségi állapotoknak megfelelő köröket megrajzolta. Ebben az esetben valamennyi kör a csúszás kezdetét jellemző állapotról vonatkozik. Burkológörbéjük megadja a feszültségi határgörbét (48. ábra). Mohr-elmélet szerint csak akkor tudunk méretezni, ha ismerjük ezt a határgörbét. Az elmondottakból következik, hogy a határgörbe alatt elhelyezkedő feszültségállapotok nem okoznak tönkremenetelt, míg a görbe pontjai és a felette levő pontok a veszélyes feszültségi állapothoz tartoznak.



48. ábra
A Mohr-féle feszültségi határgörbe

A gyakorlatban használt jól alakítható anyagoknál a határgörbe a τ -tengely környezetében vízszintes egyenessel közelíthető (49. ábra). Az ábra szerint az általános feszültségi állapothoz tartozó redukált feszültség a Mohr-kör átmérője

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3.$$



49. ábra

A Mohr-féle feszültségi határgörbe a τ -tengely közelében

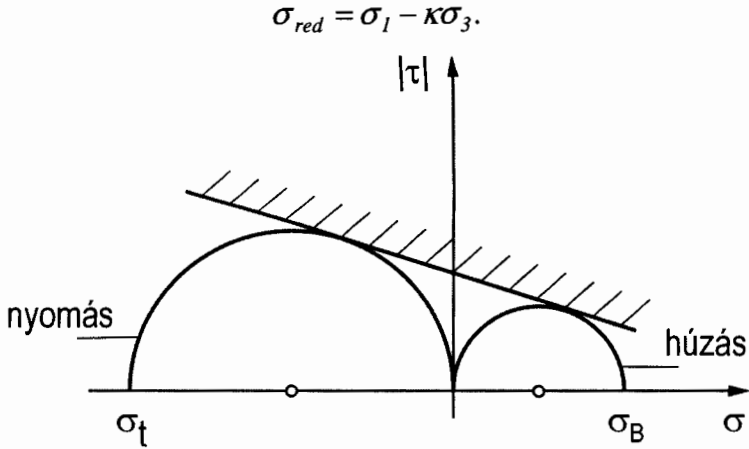
A kapott eredményből látható, hogy a Mohr-elmélet a σ_2 főfeszültség hatását elhanyagolja.

Hidroztatikus feszültségállapot esetén $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, emiatt $\sigma_{red} = 0$ és a Mohr-kör egyetlen pont lesz, vagyis az anyag bármekkora hidroztatikus húzást illetve nyomást károsodás nélkül kibír.

A rideg anyagok (például öntöttvas, beton) húzó- és nyomószilárdsága nagyon eltér egymástól (50. ábra). A Mohr-elmélet alkalmazhatósága érdekében bevezették a κ korrekciós tényezőt, ami a σ_B szakítószilárdság és a σ_T törőszilárdság hányadosa

$$\kappa = \frac{\sigma_B}{\sigma_t}$$

Ily módon a redukált feszültség



50. ábra

Rideg anyagok Mohr-körei

Öntöttvas esetén például $\kappa=0,25$.

5.2. A Huber-Mises-Hencky elmélet

A Huber-Mises-Hencky (HMH) elmélet a méretezés munkaelmélete. Alakítható anyagok esetén a veszélyes határállapot előidézéséhez bizonyos munkára van szükség. Alakváltozás során a szilárd testben (például rugóban) energia halmozódik fel és ez veszteségmentes esetet feltételezve egyenlő a külső erők munkájával. A HMH-elmélet szerint a test alakváltozása két részre bontható:

- térfogatváltozásra (az alak változatlan marad) és
- állandó térfogat melletti torzulásra (például a kiskocka lapjai által bezárt szögek megváltoznak).

Ennek megfelelően az alakváltozási munka is felosztható térfogatváltozási és torzulási munkára. Hidrosztatikus nyomás esetén ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$) a geometriai alak hasonló marad és csak térfogatváltozás lép fel (nincs torzulás).

Az elmélet szerint a térfogatváltozási munkának a töréshez nincsen köze, ezért maradó alakváltozás akkor indul meg, ha a torzítási munka eléri az anyagra jellemző értéket. Két feszültségállapot akkor egyenértékű, ha a feszültségállapotok fajlagos torzítási munkája megegyezik.

A redukált feszültség értéke levezetés nélkül

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Látható, hogy a redukált feszültség bevezetésével a több tengelyű feszültségállapottal veszélyesség szempontjából egyenértékű egyetlen feszültséget lehet előállítani. Ellenőrzéskor igazolni kell, hogy a szerkezet valamely pontjában ébredő maximális redukált feszültség kisebb a megengedett értéknél

$$\sigma_{red} \leq \sigma_{meg}.$$

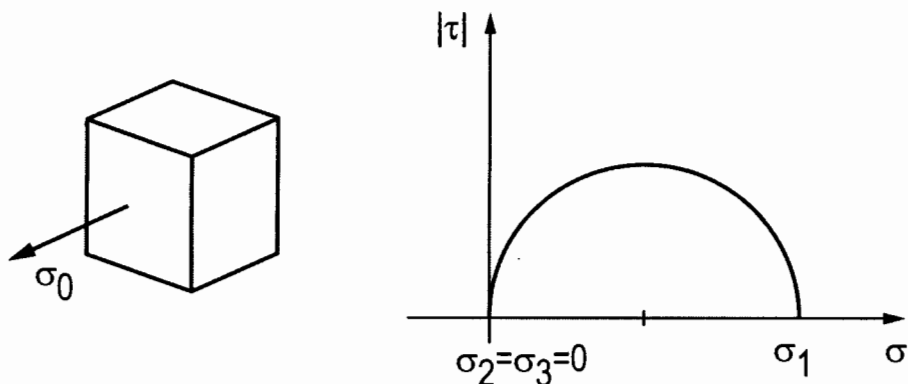
5.3. A Mohr- és a HMM-elmélet összehasonlítása

A különböző feszültségi állapotok összehasonlításakor általában nem a fajlagos torzítási munkákat hasonlítják össze, hanem a redukált feszültségeket. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a kétféle elmélettel, különböző igénybevételek esetén miként alakulnak a redukált feszültségek.

Húzás (nyomás)

Az 51. ábrán látható kiskocka oldalsó lapján a húzásból származó feszültség ébred. A Mohr-elmélet szerint

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_o.$$



51. ábra

A húzás és Mohr-köre

A HMH-elmélet szerint

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_o.$$

Látható, hogy húzás (nyomás) esetén mindkét elmélet ugyanazt a redukált feszültséget adja.

Tiszta nyírás, csavarás

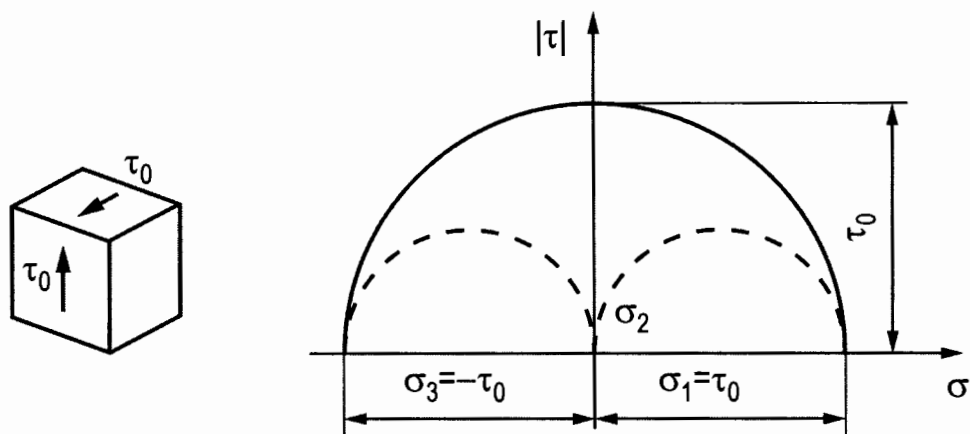
Nyírás és csavarás esetén a kiskocka lapjain a dualitás elvének megfelelően τ_o feszültségek ébrednek (52. ábra). A feszültségi állapot Mohr-körének megrajzolása után leolvashatók a főfeszültségek: $\sigma_1 = \tau_o$ és $\sigma_3 = -\tau_o$. A redukált feszültség Mohr-elmélet szerint

$$\sigma_{red} = 2 \tau_o$$

és HMH-elmélet szerint

$$\sigma_{red} = \sqrt{3} \tau_o.$$

Az eredmények azt mutatják, hogy nyírófeszültségek esetén a kétféle elmélettel kapott eredmény némileg eltér egymástól.



52. ábra
A nyírás és Mohr-köre

Többirányú összetett igénybevételek

A többirányú összetett igénybevételek az általános feszültségi állapotnak felelnek meg. Ebben az esetben, mint az 53. ábrán látható a kiskocka lapjain normál és csúsztató feszültségek ébrednek. A feszültségi állapot Mohr-köre alapján

$$a = \frac{\sigma_o}{2} \quad \text{illetve} \quad \rho = \sqrt{\left(\frac{\sigma_o}{2}\right)^2 + \tau_o^2}.$$

Az előbbi mennyiségek felhasználásával felírhatók a főfeszültségek

$$\sigma_1 = a + \rho = \frac{\sigma_o}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_o}{2}\right)^2 + \tau_o^2},$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = a - \rho = \frac{\sigma_o}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_o}{2}\right)^2 + \tau_o^2},$$

A redukált feszültség Mohr-elmélet szerint

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\rho = \sqrt{\sigma_o^2 + 4\tau_o^2}.$$

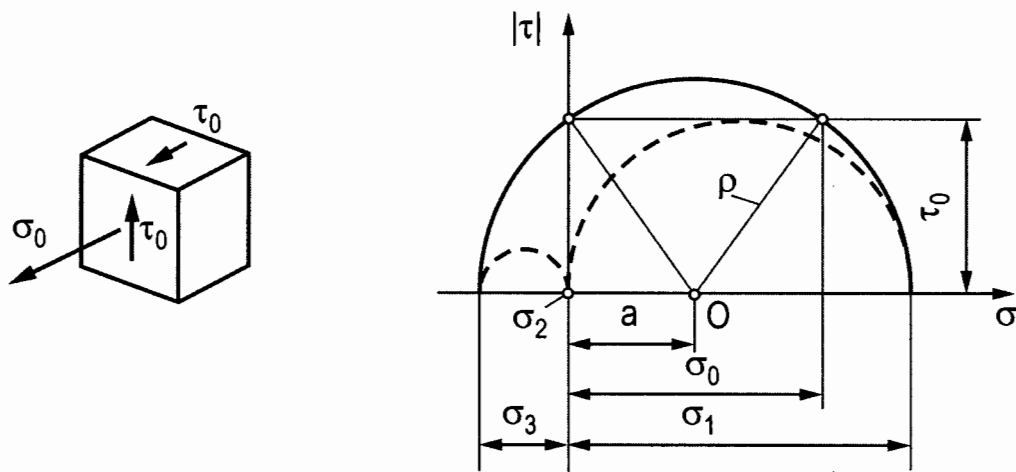
HMH-elmélet szerint

$$\begin{aligned} \sigma_{red} &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} (a^2 + 2a\rho + \rho^2 + a^2 - 2a\rho + \rho^2 + 4\rho^2)} = \sqrt{3\rho^2 + a^2} = \sqrt{\sigma_o^2 + 3\tau_o^2}. \end{aligned}$$

Az elméletek alapján kapott összefüggéseket egy képletbe foglalhatjuk

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_o^2 + \beta\tau_o^2},$$

ahol $\beta=4$, ha Mohr-elmélettel számítjuk a redukált feszültséget és $\beta=3$, ha a Huber-Mises-Hencky elméletet használjuk.

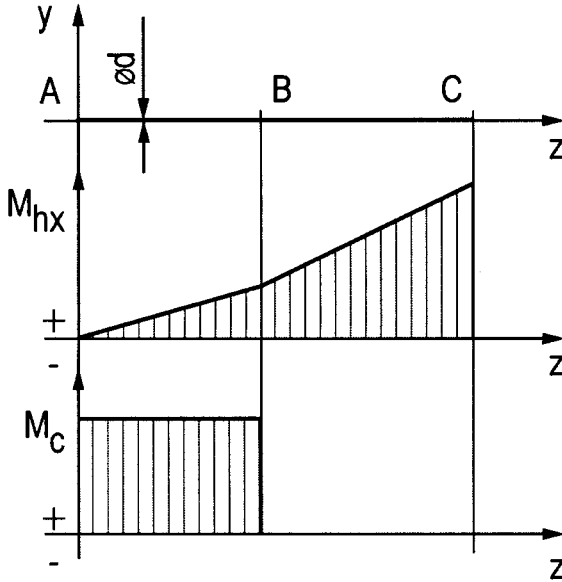


53. ábra

Többirányú összetett igénybevételek és Mohr-körök

5.4. Rúdszerkezetek méretezésének áttekintése

A rúdszerkezetek méretezésének lépéseit az 54. ábrán látható d átmérőjű rúd kapcsán foglaljuk össze. A módszer alapját képezi a kör illetve körgyűrű keresztmetszetű, hajlításra és csavarásra igénybevett tengelyek méretezésének. A méretezés az alábbiak szerint öt lépésre bontható.



54. ábra

Hajlításra és csavarásra igénybevett rúd

1. Az igénybevételek meghatározása

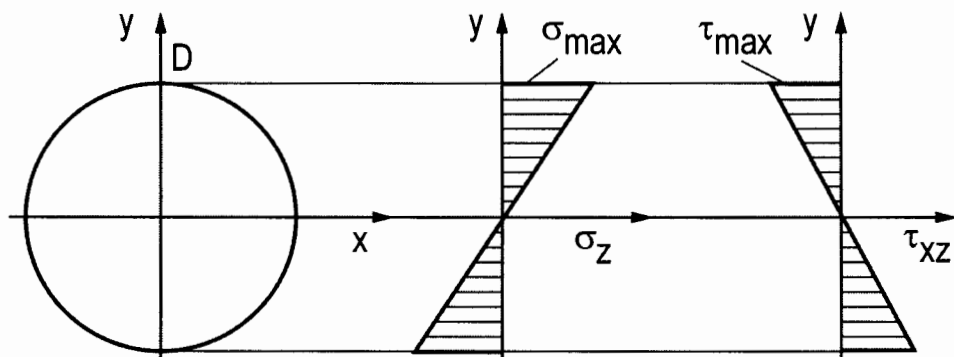
Az igénybevételek megállapítása céljából a statikában tanultak szerint meg kell rajzolni az igénybevételi ábrákat. Esetünkben feltételezzük, hogy a rúdra (tengelyre) csak az 54. ábra szerinti hajlító és csavaró igénybevétel hat.

2. A veszélyes keresztmetszet kiválasztása

Az igénybevételi ábrák ismeretében a tartó hossza mentén meg kell keresni azt a keresztmetszetet, ahol a legnagyobb igénybevétel ébred és ez a hely lesz a veszélyes keresztmetszet. Előfordulhat az is, hogy egy tartó több keresztmetszete egyformán veszélyes illetve több olyan keresztmetszetet találunk, melyek közül csak külön vizsgálattal tudjuk eldönteni, hogy melyik keresztmetszet igénybevétele a legveszélyesebb. Az 54. ábra alapján feltételezzük, hogy esetünkben a *B*-keresztmetszet a veszélyes.

3. A veszélyes keresztmetszet feszültségeloszlásának megrajzolása

Eddigi ismereteink alapján tudjuk, hogy egy keresztmetszet mentén változhat a feszültségek eloszlása. Például hajlítás esetén a hajlítás tengelyétől legtávolabbi pontokban ébred a maximális normál feszültség. Az 55. ábra a *B*-keresztmetszet hajlításából és csavarásából származó feszültségeinek eloszlását mutatja.



55. ábra

Feszültségeloszlás a rúd keresztmetszete mentén

4. A keresztmetszet veszélyes pontjának megkeresése

A *B* jelű veszélyes keresztmetszet feszültségeloszlásának ismeretében meg lehet keresni a keresztmetszet azon pontját, ahol a legnagyobb feszültségek ébrednek.

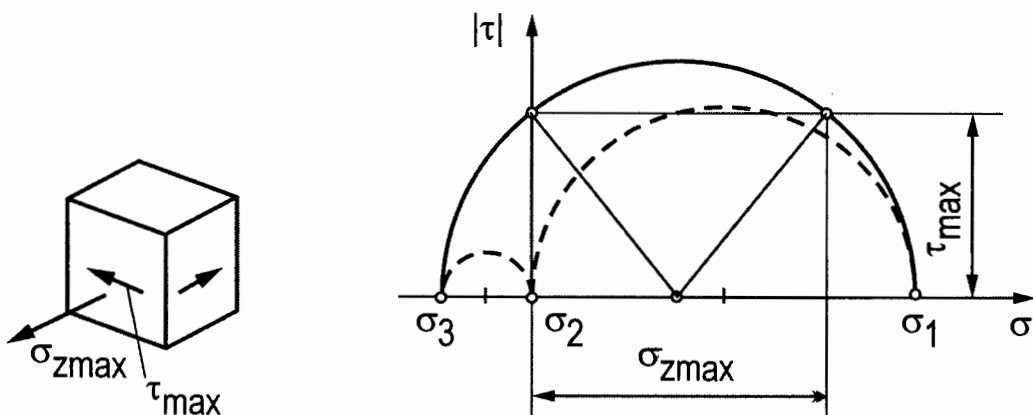
Többirányú összetett igénybevétel esetén előfordulhat, hogy nem dönthető el egyértelműen, hogy melyik a legveszélyesebb pont. Ebben az esetben minden veszélyesnek tűnő pontban meg kell határozni valamelyik feszültségelmélettel a redukált feszültséget és közülük kell kiválasztani a legnagyobbat. Esetünkben a keresztmetszet veszélyes pontja a D. Itt jegyezzük meg, hogy a keresztmetszet alsó pontjában (D-vel szemben) is ugyanakkora nagyságú σ és τ feszültség ébred.

5. A redukált feszültség számítása, ellenőrzés

A maximális redukált feszültség ismeretében ellenőrizni kell, hogy a redukált feszültség kisebb-e mint az anyagra megengedett feszültség

$$\sigma_{red} \leq \sigma_{meg}$$

A redukált feszültség számításához ismerni kell a D-pontban ébredő maximális σ és τ feszültségeket. A feszültségi állapot Mohr-körét az 56. ábra mutatja.



56. ábra

A feszültségi állapot és Mohr-köre

A hajlításból származó maximális normálfeszültség a

$$\sigma_{max} = \frac{M_{hx}}{K_x},$$

a csavarásból származó maximális csúsztató feszültség pedig a

$$\tau_{max} = \frac{M_c}{K_p} = \frac{M_c}{2K_x}$$

összefüggéssel számítható. A redukált feszültség

$$\begin{aligned}\sigma_{red} &= \sqrt{\sigma_{max}^2 + \beta \tau_{max}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_c}{2K_x}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{K_x} \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2} = \frac{M_{red}}{K_x} \leq \sigma_{meg}.\end{aligned}$$

A redukált nyomaték értéket az

$$M_{red} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}$$

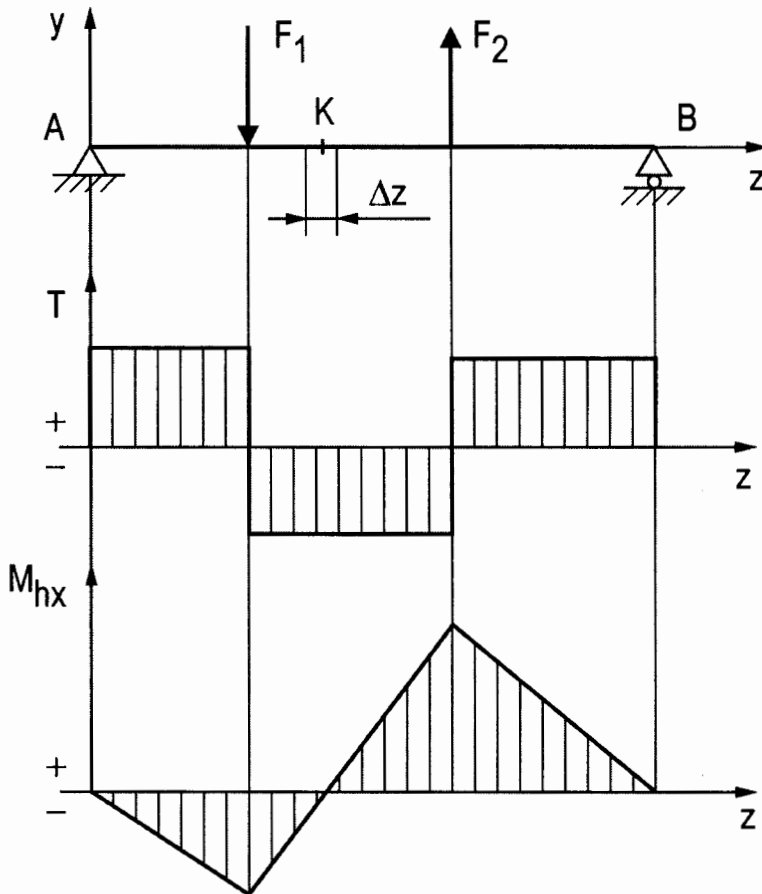
képlettel lehet számítani. Ezt az összefüggést használják kör vagy körgyűrű keresztmetszetű tengelyek ellenőrzésekor. Ha Mohr-elmélettel ellenőrizzük a szerkezetet, akkor $\beta=4$ és csak ebben az esetben képezhető formailag Pitagorasz-tétellel a hajlító és csavaró nyomaték eredője.

5.5. A hajlítással párosult nyírás

A tiszta nyírás tárgyalásakor, valamint az igénybevételi ábrák szerkesztésekor láttuk, hogy a gyakorlatban tiszta nyírást nagyon nehéz megvalósítani, mert a tartók hossz tengelyére merőleges erők egyúttal hajlítást is okoznak. Ennek

következtében a kiválasztott keresztmetszet valamely pontjában normál- és nyírófeszültségek ébrednek.

Az 57. ábrán vázolt terhelési eset alátámasztja az előbbi kijelentésünket.

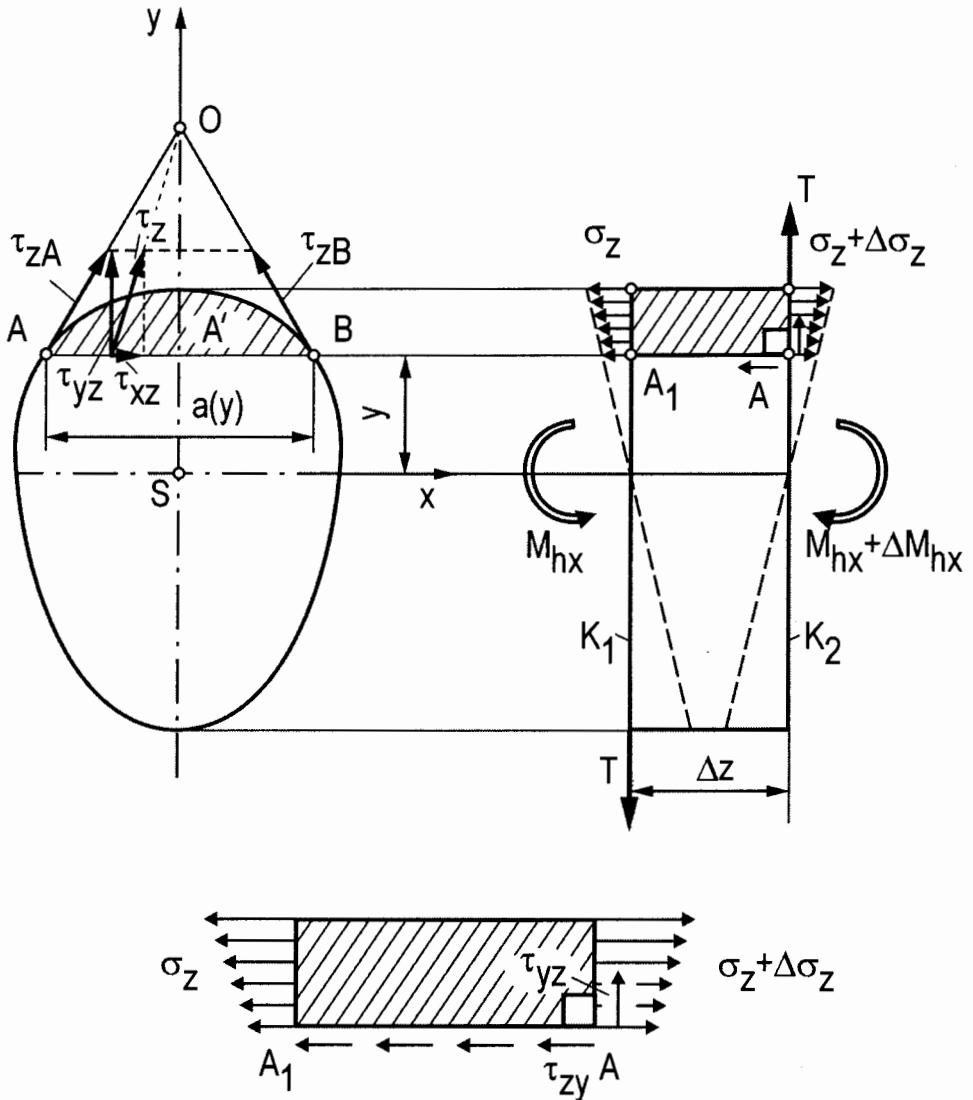


57. ábra

Hajlításra és nyírásra igénybe vett tartó

A hajlítással párosult nyírás tehát többirányú összetett igénybevételt jelent. Célunk, hogy meghatározzuk a tartó valamely keresztmetszetében hogyan oszlanak el a nyírófeszültségek. E célból gondolatban vágjunk ki a tartóból egy Δz hosszúságú rúdelemet, melyet a K_1 és K_2 keresztmetszetek határolnak (58. ábra). A K_1 keresztmetszet igénybevételét a T nyíróerő illetve az M_{hx} hajlító

nyomaték okozza, míg a K_2 keresztmetszetben a változatlan T és illetve a megnövekedett $M_{hx} + \Delta M_{hx}$ idézi elő a feszültségeket.



58. ábra

A hajlítással párosult nyírás értelmezése

Vizsgálataink során feltételezzük, hogy a rúd legalább egy szimmetriatengelyvel rendelkezik és ez benne van a terhelés síkjában. Feltételezzük továbbá,

hogy a súlyponti x-tengelytől adott y távolságra levő $a(y)$ vízszintes egyenes bármely pontjában ébredő τ_z feszültségek hatásvonala az O ponton megy keresztül. A keresztmetszet A és B kerületi pontjában ébredő csúsztató feszültségek pedig érintő irányúak. A szimmetria tengelytől azonos távolságra levő τ_{xz} feszültség komponensek egyenlő nagyságúak, de ellentétes értelműek. Valamely y magasságban a τ_{yz} komponensek azonos nagyságúak, ezért a dualitás elve értelmében a τ_{zy} feszültségekkel is megegyeznek és az $a(y)\Delta z$ felületen egyenletesen oszlanak el. Célunk a továbbiakban, hogy meghatározzuk miként változik a τ_{yz} feszültségek nagysága az x-tengelytől mért y távolság függvényében. E célból fel kell írni az 58. ábrán látható AB szakasz fölötti Δz hosszúságú test egyensúlyát kifejező z irányú egyenletet

$$\Sigma F_{iz} = -a(y)\Delta z \tau_{zy} - \int_{(A')} \sigma_z dA + \int_{(A)} (\sigma_z + \Delta \sigma_z) dA = 0,$$

ahol A' az $a(y)$ szakasz fölötti területet jelenti. A normál feszültségeket a Navier-képlet alapján lehet számítani

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y, \text{ illetve } \Delta \sigma_z = \frac{\Delta M_{hx}}{I_x} y.$$

Egyszerűsítés után figyelembe véve, hogy $\tau_{zy} = \tau_{yz}$

$$-a(y)\Delta z \tau_{yz} + \int_{(A')} \frac{\Delta M_{hx}}{I_x} y dA = 0,$$

majd átalakítás után adódik, hogy

$$\tau_{yz} = \frac{\Delta M_{hx}}{\Delta z} \frac{1}{I_x a(y)} \int_{(A')} y dA.$$

A statikában tanultak szerint

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta M_{hx}}{\Delta z} = \frac{dM_{hx}}{dz} = -T \quad \text{és} \quad S_x = \int_{(A')} y dA.$$

Behelyettesítés után kapjuk a csúszató feszültségek $a(y)$ menti számítására alkalmas összefüggést

$$\tau_{yz} = -\frac{TS_x}{a(y)I_x},$$

ahol T a nyíróerő, S_x az $a(y)$ egyenes fölötti „vizsgált” keresztmetszet x-tengelyre számított statikai nyomatéka, I_x a teljes keresztmetszet súlyponti tengelyére számított másodrendű nyomatéka, $a(y)$ az x-tengelytől y távolságra levő szélességi méret.

A kapott összefüggésből látható, hogy a tiszta nyírással ellentétben a csúszató feszültségek eloszlása függ a keresztmetszet alakjától. Ezután megvizsgáljuk, hogy néhány gyakran előforduló keresztmetszetnél miként alakul a feszültségek eloszlása.

Téglalap alakú keresztmetszet

Az 59. ábrán látható téglalap keresztmetszetet T nyíróerő és az x-tengely körül ható M_{hx} hajlító nyomaték terheli. A sraffozott keresztmetszet statikai nyomatéka az x-tengelyre számítva

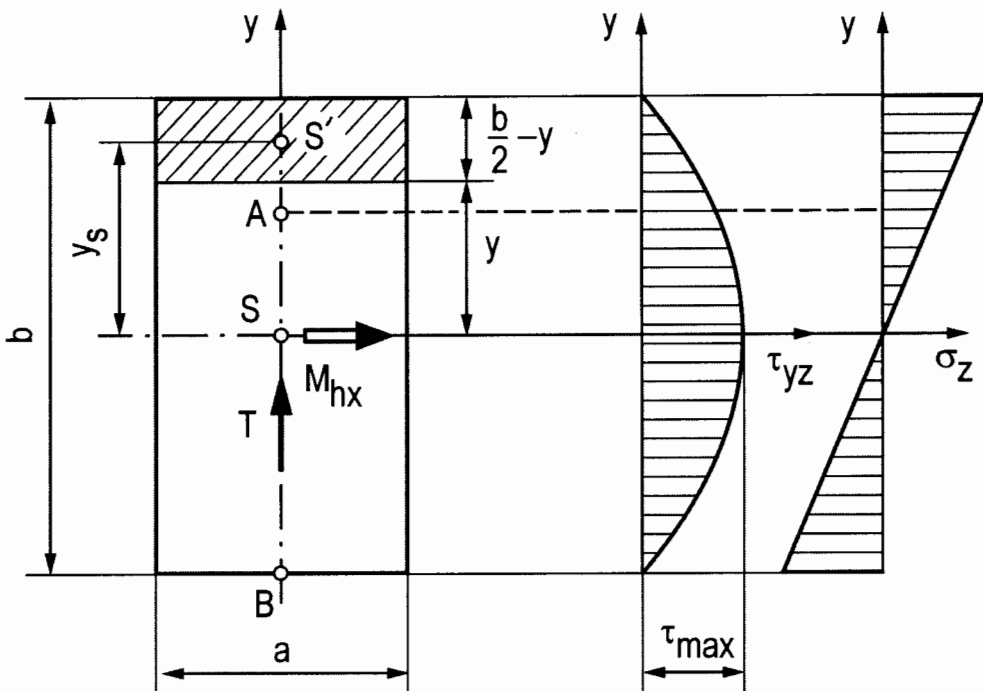
$$S_x(y) = y_s A = \frac{I}{2} \left(\frac{b}{2} + y \right) \left(\frac{b}{2} - y \right) a = \frac{I}{2} a \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right).$$

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka

$$I_x = \frac{ab^3}{12}.$$

A csúszató feszültségek értéke a pozitív előjel szabályt figyelembe véve

$$\tau_{yz} = \frac{TS_x(y)}{a(y)I_x} = \frac{12T}{a^2b^3} \frac{a}{2} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) = \frac{6T}{ab^3} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right).$$



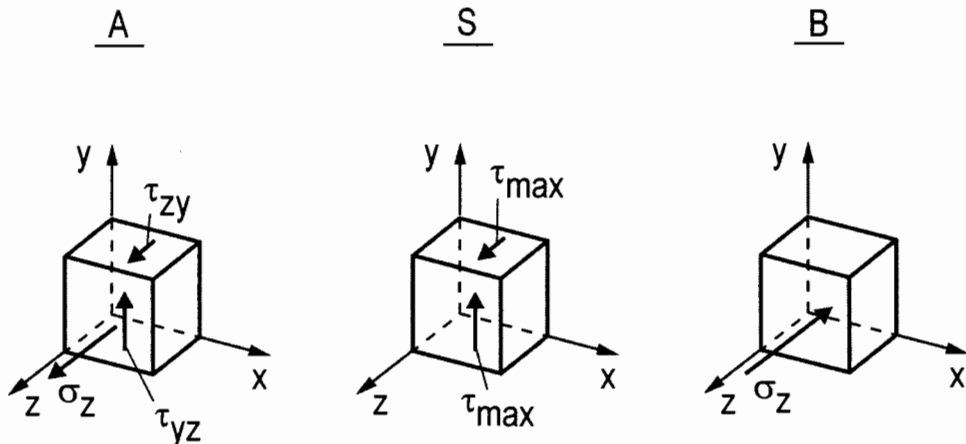
59. ábra

Hajlításra és nyírásra igénybevett téglalap keresztmetszet

Látható, hogy a csúsztató feszültségek eloszlása parabolikus függvénnyel írható le. Értéke $y = \pm \frac{b}{2}$ -nél zérus, maximumát az $y=0$ helyen veszi fel

$$\tau_{max} = \frac{6T}{ab^3} \frac{b^2}{4} = \frac{3}{2} \frac{T}{ab} = \frac{3}{2} \tau_{\text{átlag}}$$

Tiszta nyírás esetén a $\tau_{\text{átlag}}$ értéket kapjuk, de a valóságban ehhez képest a maximális feszültség hajlítással párosult nyírás esetén 50 %-kal nagyobb. A kapott eredmény akkor érvényes ha $b > a$, ellenkező esetben korrekcióra van szükség. A 60. ábra az A, S, és B pont környezetből kivett kiskockán mutatja a feszültségeket.



60. ábra

Feszültségeloszlás a keresztmetszet A, S és B pontjában

Kör alakú keresztmetszet

A 61. ábrán látható kör keresztmetszet y -tengelye mentén a T nyíróerő és x -tengelye mentén az M_{hx} hajlító nyomaték hat. A vonalkázott rész x -tengelyre számított statikai nyomatéka (táblázat alapján)

$$S_x = \frac{a}{3}(r^2 - y^2).$$

A másodrendű nyomaték

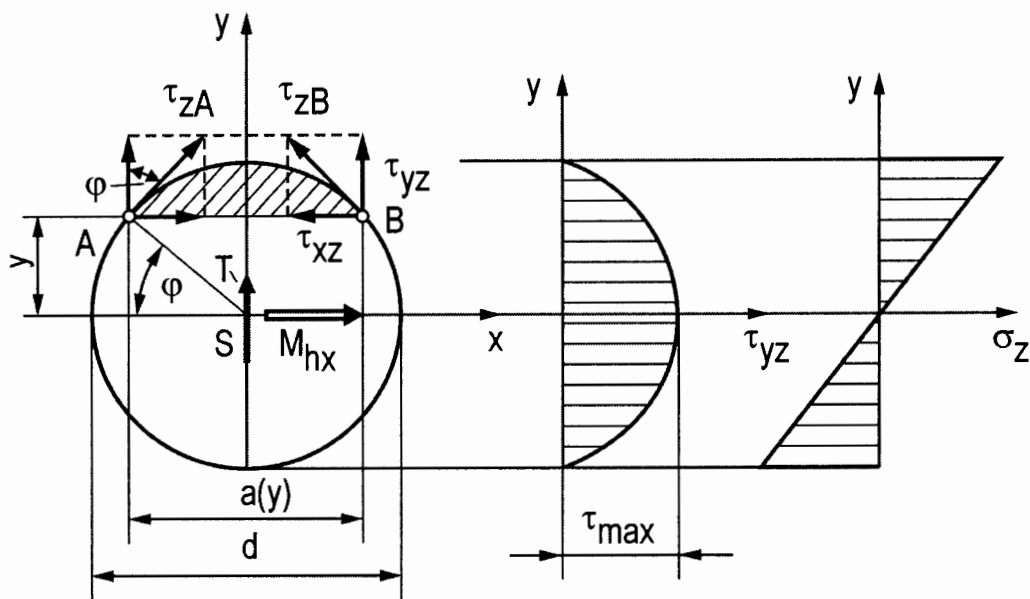
$$I_x = I = \frac{r^4 \pi}{4}.$$

A csúszató feszültség értéke

$$\tau_{yz} = \frac{TS_x}{a(y)I_x} = \frac{4Ta(r^2 - y^2)}{3ar^4\pi} = \frac{4}{3} \frac{T}{r^2\pi} \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right) = \frac{4}{3} \tau_{\text{átlag}} \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right).$$

A maximális csúsztató feszültség értéke ($y=0$) esetén

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \tau_{átlag} .$$



61. ábra

Hajlításra és nyírásra igénybevett kör keresztmetszet

A csúsztató feszültségek az y -tengely mentén parabolikusan változnak, de megnézzük, hogy a kör kerülete mentén milyen eloszlásúak. Az ábra alapján

$$\tau_z = \frac{\tau_{yz}}{\cos \varphi} = \tau_{yz} \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{4}{3} \frac{T}{r^2 \pi} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{4}{3} \frac{T}{A} \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}} .$$

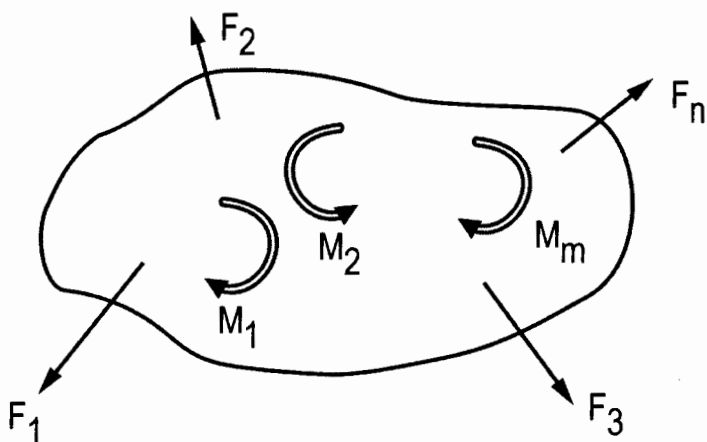
Az előbbi eredményhez hasonlóan e függvény maximumát ugyancsak az $y=0$ helyen éri el és értéke megegyezik az előbbi τ_{max} -mal, de feszültségek eloszlása a *kerület mentén* ellipszis függvény szerint változik.



6. A SZILÁRDSÁGTAN MUNKATÉTELEI

6.1. Az alakváltozás munkája

A rugalmas szilárd testre ható külső erők alakváltozás közben munkát végeznek. Ezt a W munkát a külső erők munkájának nevezzük. Ha a terheket lassan növelve (statikusan) visszük fel, akkor a végzett munka a testben (a rugóhoz hasonlóan) felhalmozódik és ideálisan rugalmas anyagot feltételezve a terhelés megszüntetésekor teljes egészében visszanyerhető. Ezt a visszanyerhető U potenciális energiát belső energiának, a belső erők munkájának nevezzük. Statikus terhelésmód esetén a testre ható valamennyi erőt és erőpárt zérustól kezdődően fokozatosan növelve visszük fel a végső értékig úgy, hogy ez erőrendszer állandóan egyensúlyban legyen (62. ábra). A rugalmas test a ráható erők hatására megváltoztatja alakját.

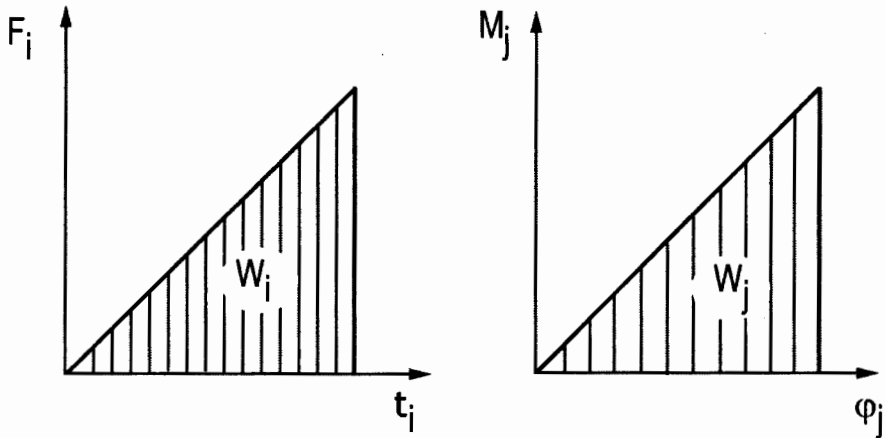


62. ábra

A rugalmas test terhelése

A 62. ábra szerint a lineárisan rugalmas anyagból készült testet $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n$ erőből és $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_m$ erőpárból álló tetszőleges egyensúlyi erőrendszer terheli. A terhelés hatására a test rugalmasan alakváltozik. Az erők támadáspontja elmozdul, a nyomatékok síkja pedig elfordul. Az F_i erő hatására létrejött erőirányú elmozdulás t_i , az M_j erőpár hatására létrejött és az erőpár síkjával párhuzamos szögelfordulás φ_j . Ekkor a 63. ábra szerint az erőrendszer alakváltozási munkáját kis elmozdulások esetén a szuperpozíció elve alapján számíthatjuk

$$W = \sum_{i=1}^n W_i + \sum_{j=1}^m W_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i t_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m M_j \varphi_j.$$



63. ábra

Az alakváltozási munka

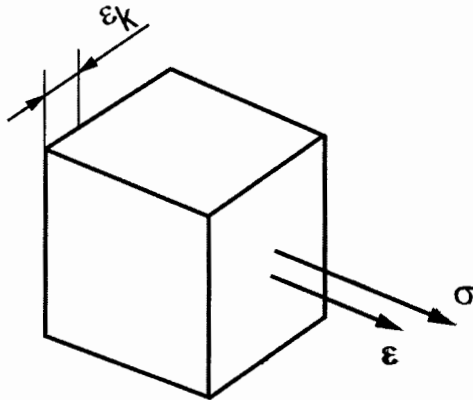
A végzett munka csak a rugalmas test végső állapotától függ, ezért független attól, hogy a terhelőerőket és az erőpárokat milyen sorrendben vittük fel.

Tudjuk, hogy a külső erők hatására a rugalmas testben belső erők, feszültségek ébrednek. A belső erők munkája kifejezhető a testben a terhelés hatására fellépő σ és τ feszültségekkel. Az egységnyi térfogatú kiskocka (64. ábra) belső energiája húzás, nyomás és hajlítás esetén

$$u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon,$$

míg az egész testben felhalmozódott belső energia

$$u = \int_{(V)} u dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV.$$



64. ábra

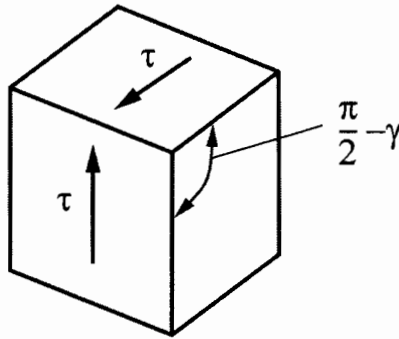
A normál feszültség és a fajlagos nyúlások

Nyírás és csavarás esetén az egységnyi térfogatú kiskocka (65. ábra) belső energiája

$$u = \frac{1}{2} \tau \gamma$$

és az egész térfogatra az alábbi összefüggéssel számítható

$$u = \int_{(V)} u dV = \frac{1}{2} \int_V \tau \gamma dV.$$



65. ábra

A csúsztató feszültségek és a szögtorzulás

A teljes testben felhalmozódó belső energiát általános esetben feszültség-összetevőkkel lehet meghatározni

$$U = \frac{1}{2} \int_{(V)} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV .$$

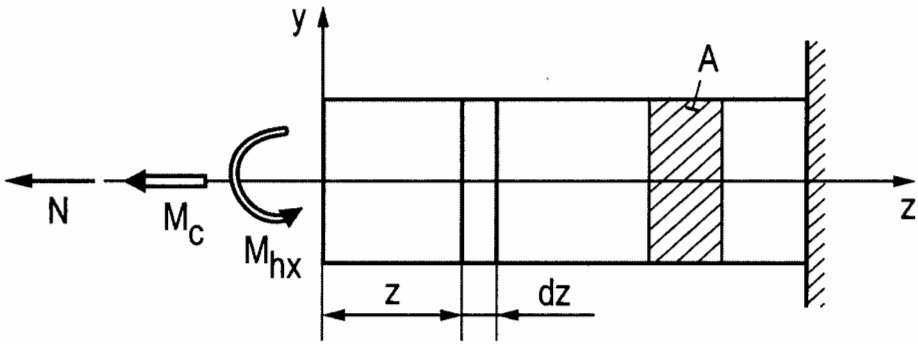
Általános esetben a testben felhalmozott belső energia rúdirányú erőkből (húzásból, nyomásból) U_N , hajlításból U_{M_h} , csavarásból U_{M_c} és nyírásból U_T származik

$$U = U_N + U_{M_h} + U_{M_c} + U_T .$$

A nyírásból származó belső energia a többi belső energia összetevő mellett elhanyagolható. Rétegzett (szendvics-) szerkezetek esetén azonban már ez nem tehető meg, mert e szerkezet típusok nyírási alakváltozása számottevő.

6.2. A belső energia számítása rúd alakú testeknél

A belső energia számítását a 66. ábrán látható a rúd kapcsán ismertetjük. Általános esetben azonban a rúd A keresztmetszete, a súlyponti tengelyre számított I_x másodrendű nyomatéka és I_p poláris másodrendű nyomatéka is változhat az $A=A(z)$, $I_x=I_x(z)$ és $I_p=I_p(z)$ függvény szerint.



66. ábra
A rúd terhelése

A húzás (nyomás) belső energiája

Húzás (nyomás) esetén az $N(z)$ függhet a z koordinátától. A terhelés hatására σ_z feszültség és ε_z fajlagos nyúlás jön létre

$$\sigma_z = \frac{N(z)}{A(z)}, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \text{és} \quad dV = A(z)dz.$$

Számításaink során feltételezzük, hogy a rugalmassági modulusz állandó. A belső energia

$$U_N = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma_z \varepsilon_z dV = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N(z)}{A(z)} \frac{1}{E} \frac{N(z)}{A(z)} A(z) dz = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{N^2(z)}{A(z)} dz,$$

$$U_N = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{N^2(z)}{A(z)} dz.$$

Ha a rudat a keresztmetszet súlypontjában támadó állandó normálerő terheli, és $A(z)$ állandó, akkor a belső energia

$$U_N = \frac{N^2 l}{2AE}$$

összefüggés alapján számítható, ahol AE az ún. húzási merevség.

A hajlítás belső energiája

Általános esetben az $M_{hx}=M_{hx}(z)$ hajlítónyomaték a tartó hossza mentén változhat és hatására σ_z feszültség és ε_z fajlagos nyúlás jön létre

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}(z)}{I_x(z)} y, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \text{és} \quad dV = dAdz.$$

A belső energia számításakor feltételezzük, hogy rugalmassági modulusz állandó

$$U_{M_h} = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma_z \varepsilon_z dV = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^A \frac{M_{hx}(z)}{I_x(z)} y \frac{1}{E} \frac{M_{hx}(z)}{I_x(z)} y dAdz = \frac{1}{2E} \int_0^l \int_0^A \left(\frac{M_{hx}(z)}{I_x(z)} \right)^2 y^2 dAdz.$$

Mivel $I_x = \int_0^A y^2 dA$, ezért a belső energia

$$U_{M_h} = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_{hx}^2(z)}{I_x(z)} dz.$$

Ha $M_{hx}(z)$ és $I_x(z)$ állandó, akkor a hajlításból származó belső energia az

$$U_{M_h} = \frac{M_{hx}^2 l}{2I_x E}$$

képlet szerint számítható, ahol $I_x E$ az ún. hajlítási merevség.

A csavarás belső energiája

Általános esetben az $M_c=M_c(z)$ csavaró nyomaték a tartó hossza mentén változhat és hatására τ feszültség és γ szögtorzulás jön létre

$$\tau = \frac{M_c(z)}{I_p(z)} \rho, \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{és} \quad dV = dAdz.$$

A belső energia számításakor feltételezzük, hogy a G csúsztató rugalmassági modulusz állandó

$$U_{M_c} = \frac{1}{2} \int_0^l \tau \gamma dV = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^A \frac{M_c(z)}{I_p(z)} \rho \frac{1}{G} \frac{M_c(z)}{I_p(z)} \rho dA dz = \frac{1}{2G} \int_0^l \left(\frac{M_c(z)}{I_p(z)} \right)^2 \rho^2 dA dz.$$

Mivel $I_p = \int_{(A)} \rho^2 dA$, ezért a belső energia

$$U_{M_c} = \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{M_c^2(z)}{I_p(z)} dz.$$

Ha az $M_c(z)$ és $I_p(z)$ *állandó*, akkor a csavarásból származó belső energia az

$$U_{M_c} = \frac{M_c^2 l}{2I_p G}$$

képlet szerint számítható, ahol $I_p G$ az ún. csavarási merevség.

6.3. Betti-tétele

A továbbiakban terheljük a rugalmas testet két tetszőleges erőrendszerrel. Az első erőrendszer 1-es indexű erőkből és erőpárokból áll, míg a másik erőrendszer 2-es indexű erőket és erőpárokat tartalmaz. Először terheljük a testet statikusan az 1-es erőrendszerrel. Terhelés során az 1-es erőrendszer által végzett munka W_{11} . Ezt követően vigyük fel a testre ugyancsak statikusan a 2-es erőrendszert, amelyik most W_{22} munkát végez. A 2-es erőrendszer felvitele során mivel az további alakváltozásokat hoz létre, ezért az 1-es erőrendszer is végez munkát, melynek értéke W_{12} . Végállapotban az összes munka

$$W = W_{11} + W_{22} + W_{12}.$$

A W_{11} illetve a W_{22} az erőrendszer saját munkája, míg a W_{12} az ún. idegen munka.

Ezután fordítsuk meg az erőrendszerek felvitelének sorrendjét és először vigyük fel a 2-es erőrendszert majd utána az 1-es erőrendszert. Végállapotban az összes munka most is

$$W = W_{22} + W_{11} + W_{21},$$

ahol W_{21} a 2-es erőrendszer munkája az 1-es erőrendszer által létrehozott alakváltozás során.

A kétféle terhelésmód során a végzett munkák egyenlőségéből adódik az idegen munkák egyenlősége, vagyis a Betti-tétel

$$W_{12} = W_{21}.$$

Mivel ideálisan rugalmas test esetén a külső erők munkája megegyezik a testben felhalmozódott belső energiával, ezért $W = U$. A tétel tehát a rugalmas testekben a terhelések hatására felhalmozott alakváltozási energiákra is érvényes

$$U_{12} = U_{21}.$$

A tétel további formái: $W_{12} = U_{21}$, illetve $W_{21} = U_{12}$. A fentiekből látható, hogy Betti-tételének alkalmazása céljából ismerni kell az idegen munkát.

Az idegen munka számítása

Említettük, hogy rúdalakú testeknél a belső energia számításakor a nyírás munkáját el lehet hanyagolni. A rúdalakú testek lehetnek görbevonalúak is, ezért az igénybevételi függvényeket az s ívkoordináta függvényében írjuk fel. A továbbiakban csak a normálerő $N(s)$ a hajlítónyomaték $M_h(s)$ és a csavarónyomaték $M_c(s)$ igénybevételi függvényével számolunk és ezeket tekintjük az

1-es erőrendszerhez tartozónak. A második (célszerűen megválasztott) erőrendszer igénybevételei függvényei legyenek a következők

$$n(s), \quad m_h(s) \quad \text{és} \quad m_c(s).$$

A két erőrendszer egyidejű működtetésekor a szuperpozíció elvének megfelelően a keresztmetszetek igénybevételei összegezhetők így a rúdban felhalmozódott belső energia

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(N+n)^2}{AE} ds + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(M_h+m_h)^2}{IE} ds + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(M_c+m_c)^2}{I_p G} ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{AE} + \frac{M_h^2}{IE} + \frac{M_c^2}{I_p G} \right) ds + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{n^2}{AE} + \frac{m_h^2}{IE} + \frac{m_c^2}{I_p G} \right) ds + \\ &+ \int_0^l \frac{Nn}{AE} ds + \int_0^l \frac{M_h m_h}{IE} ds + \int_0^l \frac{M_c m_c}{I_p G} ds = U_{11} + U_{22} + U_{12}. \end{aligned}$$

Az igénybevételek négyzetes tagjait tartalmazó integrálok az 1-es illetve 2-es erőrendszer saját belső energiáját jelölik, míg az idegen belső energia

$$U_{12} = \int_0^l \frac{Nn}{AE} ds + \int_0^l \frac{M_h m_h}{IE} ds + \int_0^l \frac{M_c m_c}{I_p G} ds = U_{21}.$$

Látható, hogy Betti-tételének alkalmazásakor az idegen belső energiát kell kiszámítani. Az integrálok kiszámítása érdekében a tartót olyan szakaszokra célszerű bontani, ahol a merevségi jellemzők (AE , IE , $I_p G$) illetve az igénybevételek (N , M_h , M_c , n , m_h , m_c) állandók vagy változásuk folytonos függvényvel írható le.

Betti-tételének segítségével tetszés szerinti keresztmetszetek elmozdulását és szögelfordulását lehet meghatározni. Valamely keresztmetszet elmozdulásának számításakor a 2-es erőrendszert úgy célszerű felvenni, hogy az ne legyen más, mint az a vizsgált keresztmetszetben működő egységnyi erő. Helyes választás esetén tehát közvetlenül a vizsgált keresztmetszet elmozdulását kapjuk. Ugyanez

érvényes a szögelfordulások számításakor is, amikor egységnyi nyomatékot célszerű felvenni.

6.4. Betti-tételének alkalmazása

Határozzuk meg a 67. ábrán látható egyenletesen megoszló erőrendszerrel terhelt tartó B keresztmetszetének lehajlását és szögelfordulását. A tartó IE hajlítási merevsége állandó. A nyíró igénybevétel hatását elhanyagoljuk.

Az egyenletesen megoszló erőrendszer és a befogásnál ébredő reakcióerő valamint reakciónyomaték alkotja az 1-es erőrendszert. A B keresztmetszet elmozdulásának számításához a 2-es erőrendszert az elmozdulás helyén felvett Q erő és a befogásnál ébredő reakcióerő valamint nyomaték alkotja. Jelöljük a tartó B jelű keresztmetszetének elmozdulását y_B -vel. Ily módon a 2-es erőrendszer munkája az 1-es erőrendszer okozta alakváltozás során

$$W_{21} = Qy_B,$$

Mivel az A -keresztmetszet nem mozdul el ezért általa nincs munkavégzés. A rúd igénybevétele hajlítás, így a belső energia

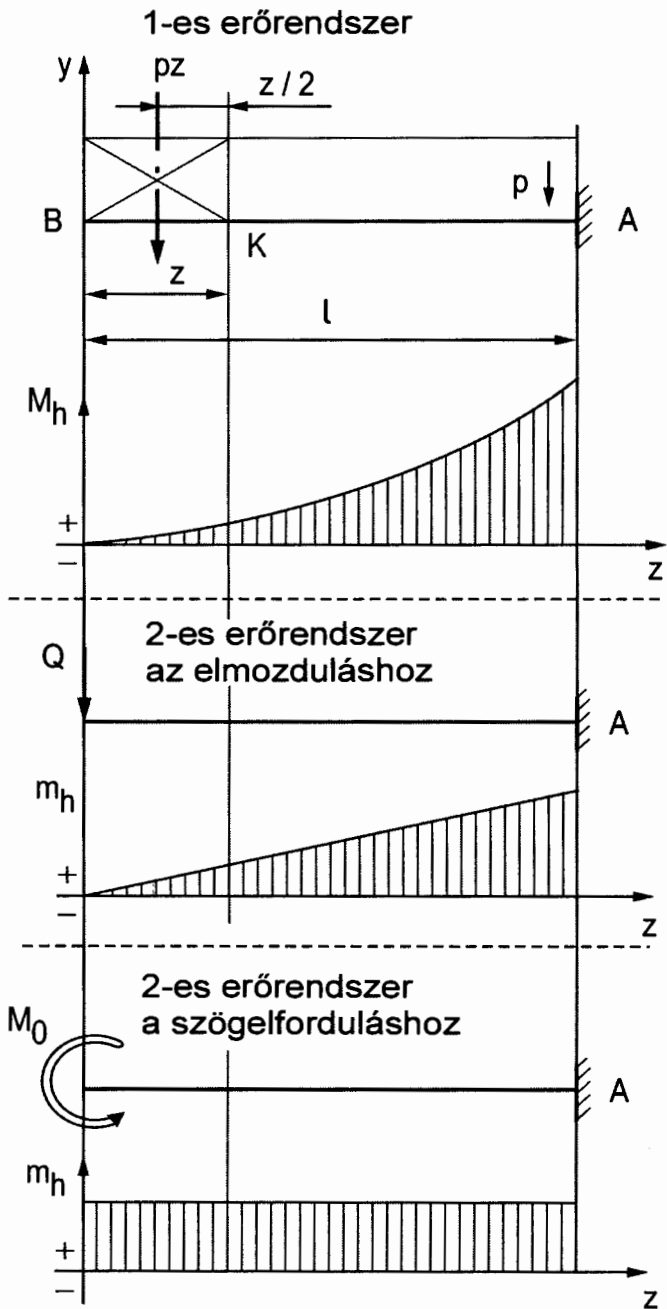
$$U_{12} = \frac{1}{IE_0} \int_0^l M_h m_h dz.$$

A nyomatéki ábrák alapján

$$M_h = \frac{pz^2}{2} \quad \text{és} \quad m_h = Qz.$$

A belső energia összefüggésébe helyettesítés után kapjuk, hogy

$$U_{12} = \frac{1}{IE_0} \int_0^l \frac{pz^2}{2} Qz dz = \frac{Qp}{2IE} \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^l = \frac{Qpl^4}{8IE}.$$



A tartóra ható 1-es és 2-es erőrendszer

A Betti-tétel alapján

$$W_{21} = Qy_B = U_{12}$$

innen a B -keresztmetszet lehajlása

$$y_B = \frac{U_{12}}{Q} = \frac{pl^4}{8IE}.$$

A 2-es erőrendszerben célszerű az aktív erő nagyságát egységnyinek ($Q=1N$) választani, mert ebben az esetben az U_{12} és y_B mérőszáma megegyezik.

A B keresztmetszet szögelfordulásának számításához a 2-es erőrendszert az elfordulás helyén felvett M_o nyomaték és a befogásnál ébredő reakciónyomaték alkotja. Jelöljük a B keresztmetszet szögelfordulását φ_B -vel. Ily módon a 2-es erőrendszer munkája az 1-es erőrendszer okozta alakváltozás során

$$W_{21} = M_o \varphi_B,$$

mert az A keresztmetszet nem fordul el és ezáltal nincs munkavégzés. A rúd igénybevétele hajlítás, így a belső energia

$$U_{12} = \frac{1}{IE_o} \int_0^l M_h m_h dz.$$

A nyomatéki ábrák alapján

$$M_h = \frac{pz^2}{2} \quad \text{és} \quad m_h = M_o.$$

A belső energia összefüggésébe helyettesítés után kapjuk, hogy

$$U_{12} = \frac{1}{IE_o} \int_0^l \frac{pz^2}{2} M_o dz = \frac{pM_o}{2IE} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^l = \frac{pl^3 M_o}{6IE}.$$

Betti-tételének alapján

$$W_{21} = M_o \varphi_B = U_{12},$$

innen a B keresztmetszet szögelfordulása

$$\varphi_B = \frac{U_{12}}{M_o} = \frac{pl^3}{6IE}.$$

Az elmozdulás számításához hasonlóan célszerű a nyomatékot egységnyiinek választani ($M_o = 1 \text{ Nm}$).

6.5. Castigliano-tétele

A rugalmas testet $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ erőkből és $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_m$ erőpárokból álló tetszőleges, de egyensúlyi erőrendszer terheli. A test megfogása tetszőleges, de a reakcióerők statikailag határozottak kell, hogy legyenek. Ez azt jelenti, hogy a megfogásoknál ébredő reakciókomponensek száma megegyezik a felírható egyenletek számával. Ha a reakcióerők támadáspontja nem mozdulhat el, illetve a reakciónyomatékok síkja nem fordul el, akkor a reakcióerők nem végezhetnek munkát, ezért a külső erők munkája az aktív erőrendszer munkájával egyenlő. Feltételezzük, hogy a terhelés statikus és érvényes a Hooke-törvény akkor a külső erőhatások munkája

$$W = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n F_i t_i + \sum_{j=1}^m M_j \varphi_j \right),$$

ahol t_i az erő irányába eső elmozdulás és φ_j a nyomaték síkjába eső szögelfordulás.

Látható, hogy a külső erők munkája az aktív erőhatások (a terhelő erők és a nyomatékok) függvénye

$$W = W(F_1, F_2, \dots, F_n, M_1, M_2, \dots, M_m).$$

Változtassuk meg az i -edik erő nagyságát dF_i -vel, ekkor a külső erők munkájának megváltozása a többváltozós függvények deriválási szabálya szerint

$$dW = \frac{\partial W}{\partial F_i} dF_i.$$

Így a módosított erőrendszer munkája

$$W_1 = W + \frac{\partial W}{\partial F_i} dF_i.$$

Fordítsuk meg a szerkezet terhelésének sorrendjét és először vigyük fel statikusan a dF_i -t a terheletlen testre. A dF_i erő támadáspontjának elmozdulása dt_i és munkája

$$\frac{1}{2} dF_i dt_i.$$

Mivel másodrendűen kis munkáról van szó, ezért elhanyagolható. Ezután működtessük statikusan a test adott terhelését, melynek munkája az előbbi W munkával egyezik meg. A dF_i erő idegen munkája támadáspontjának t_i elmozdulásakor

$$t_i dF_i.$$

Megfordított terhelés esetén a végzett munka

$$W_2 = W + t_i dF_i.$$

Végállapotban a végzett munkák egyenlők $W_1 = W_2$. Részletesen

$$W + \frac{\partial W}{\partial F_i} dF_i = W + t_i dF_i$$

innen

$$t_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}.$$

A kapott eredmény azt jelenti, hogyha a rugalmas testben felhalmozódott alakváltoztató munkát az erő szerint parciálisan deriváljuk, akkor megkapjuk az erő irányába eső elmozdulást. Hasonló gondolatmenettel számítható az M_j nyomaték síkjának szögelfordulása is

$$\varphi_j = \frac{\partial W}{\partial M_j}.$$

A fenti két összefüggés a Castigliano-tételének egyik formája. Az esetek többségében a belső energiát határozzuk meg, ezért a $W=U$ összefüggés felhasználásával kapjuk, hogy

$$t_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$$

és

$$\varphi_j = \frac{\partial U}{\partial M_j}.$$

Ha a test olyan keresztmetszetének elmozdulását (szögelfordulását) keressük, ahol nem hat erő (nyomaték), akkor a vizsgált keresztmetszetben felvesszünk egy tetszőleges nagyságú F_o segéderőt (M_o segéderőpárt) és a számítás elvégzése után a t elmozdulásra (a φ szögelfordulásra) kapott összefüggésbe $F_o=0$ ($M_o=0$) értéket helyettesítünk

$$t = \left[\frac{\partial U}{\partial F_o} \right]_{F_o=0}$$

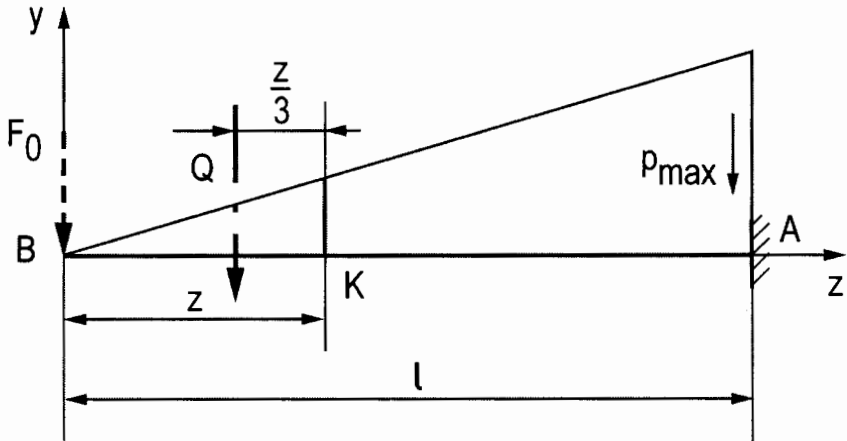
és

$$\varphi = \left[\frac{\partial U}{\partial M_o} \right]_{M_o=0}.$$

6.6. Castigliano-tételének alkalmazása

Feladatunk, hogy meghatározzuk a 68. ábrán látható lineárisan változó megoszló terhelésű konzolos tartó maximális lehajlását és szögelfordulását. A nyíróerő hatását hanyagoljuk el és az $I_x E$ hajlítási merevség legyen állandó! A belső energia csak a hajlító igénybevételből származik

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_{hx}^2}{I_x E} dz.$$



68. ábra

Lineárisan változó megoszló terhelésű tartó

A tartó B keresztmetszetében, ahol a maximális lehajlást számítjuk nem hat erő, ezért fel kell vennünk egy F_o erőt. Mivel a belső energia a hajlító nyomatéktól, a hajlító nyomaték pedig az F_o erőtől is függ, ezért az elmozdulás a közvetett függvények deriválási szabálya szerint a következőképpen számítható

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial F_o} = \frac{\partial U}{\partial M_{hx}} \frac{\partial M_{hx}}{\partial F_o} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{2M_{hx}}{I_x E} \frac{\partial M_{hx}}{\partial F_o} dz = \int_0^l \frac{M_{hx}}{I_x E} \frac{\partial M_{hx}}{\partial F_o} dz,$$

innen

$$y_B = \frac{1}{I_x E_o} \int_0^l M_{hx} \frac{\partial M_{hx}}{\partial F_o} dz.$$

A hajlítónyomaték a K keresztmetszetben

$$M_{hx} = F_o z + Q \frac{z}{3} = F_o z + \frac{P_{max}}{6l} z^3,$$

a hajlítónyomaték deriváltja

$$\frac{\partial M_{hx}}{\partial F_o} = z.$$

A B keresztmetszet lehajlása

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{1}{I_x E_o} \int_0^l \left(F_o z + \frac{P_{max}}{6l} z^3 \right) z dz = \frac{1}{I_x E_o} \int_0^l \left(F_o z^2 + \frac{P_{max}}{6l} z^4 \right) dz = \\ &= \frac{F_o}{I_x E} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^l + \frac{P_{max}}{6l I_x E} \left[\frac{z^5}{5} \right]_0^l = \frac{F_o l^3}{3 I_x E} + \frac{P_{max} l^4}{30 I_x E} \end{aligned}$$

és $F_o=0$ helyettesítéssel

$$y_B = \frac{P_{max} l^4}{30 I_x E}.$$

A B keresztmetszet szögelfordulását úgy tudjuk kiszámítani, hogy az F_o helyett egy M_o erőpárt működtetünk és az elmozduláshoz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\varphi_B = \frac{1}{I_x E_o} \int_0^l M_{hx} \frac{\partial M_{hx}}{\partial M_o} dz.$$

A hajlító nyomaték a K keresztmetszetben

$$M_{hx} = M_o + Q \frac{z}{3} = M_o + \frac{P_{max}}{6l} z^3,$$

a hajlító nyomaték deriváltja

$$\frac{\partial M_{hx}}{\partial M_o} = 1.$$

A B keresztmetszet szögelfordulása

$$\begin{aligned}\varphi_B &= \frac{1}{I_x E_o} \int_0^l M_{hx} \frac{\partial M_{hx}}{\partial M_o} dz = \frac{1}{I_x E_o} \int_0^l \left(M_o + \frac{p_{max}}{6l} z^3 \right) dz = \\ &= \frac{M_o}{I_x E} [z]_0^l + \frac{p_{max}}{6 I_x E} \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^l = \frac{M_o l}{I_x E} + \frac{p_{max} l^3}{24 I_x E}\end{aligned}$$

és $M_o=0$ helyettesítéssel

$$\varphi_B = \frac{p_{max} l^3}{24 I_x E}.$$

6.6. Maxwell-felcserélhetőségi tétele

A tétel egyszerű alakját olyan síkbeli kéttámaszú tartó kapcsán értelmezzük, melynél az erőrendszer a rúd keresztmetszetének tehetetlenségi fősíkjában hat. A 69. ábra szerint a P_1 pontban ható F_1 erő hatására a 2-es pont elmozdulása legyen t_{21} . A P_2 pontban ható F_2 erő hatására a 1-es pont elmozdulása legyen t_{12} .

A 2-es erőrendszer munkája az 1-es okozta alakváltozás során

$$W_{21} = F_2 t_{21}.$$

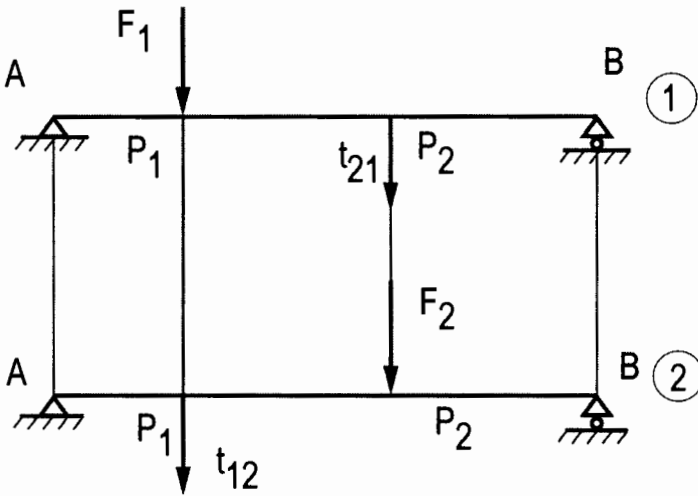
Az 1-es erőrendszer munkája a 2-es okozta alakváltozás során

$$W_{12} = F_1 t_{12}.$$

Betti-tételének értelmében az idegen munkák egyenlőségéből adódik, hogy

$$F_2 t_{21} = F_1 t_{12},$$

ami a Maxwell-féle felcserélhetőségi tétel egyszerű alakja. A tétel az erő és az elmozdulás helyének felcserélhetőségét mondja ki.



69. ábra

A Maxwell-féle felcserélhetőségi tétel értelmezése

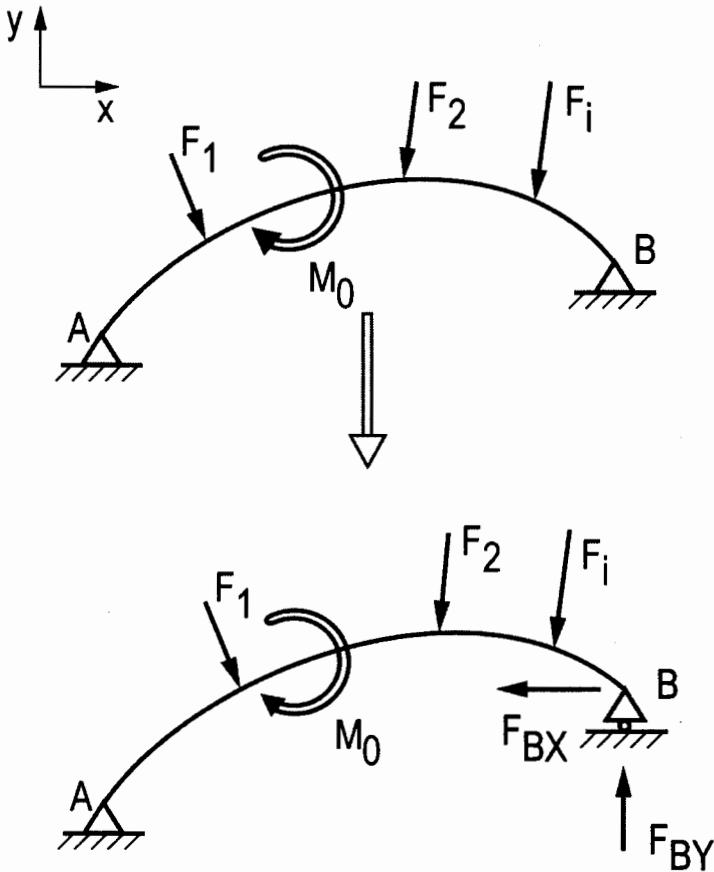
6.7. Statikailag határozatlan rúdszerkezetek számítása

A statikában tanultak szerint olyan feladatokat tudunk megoldani, amikor az ismeretlenek száma (n) és a felírható egyenletek (e) száma megegyezik. A 70. ábrán látható ívelt tartó A és B megfogásain a reakcióerő nagysága és hatásvonala ismeretlen. Ez azt jelenti, hogy egy támasznál ismeretlen az erő x - illetve y -irányú komponense. Az ismeretlenek száma tehát összesen négy. Mivel három független egyenlet írható fel, ezért a szerkezet $n-e=1$ -szeresen statikailag határozatlan.

A reakcióerők meghatározása érdekében a szerkezetet statikailag határozottá kell tenni. Ennek egyik módja, hogy a B jelű csukló helyett görgős megtámasztást alkalmazunk. Mivel ebben az esetben a B pont vízszintes irányban elmozdulhat,

ezért működtetni kell egy F_{BX} erőt, ami megakadályozza a x_B elmozdulást, amit a Castigliano-tétel alapján tudunk meghatározni

$$x_B = \frac{\partial U}{\partial F_{BX}} = 0.$$

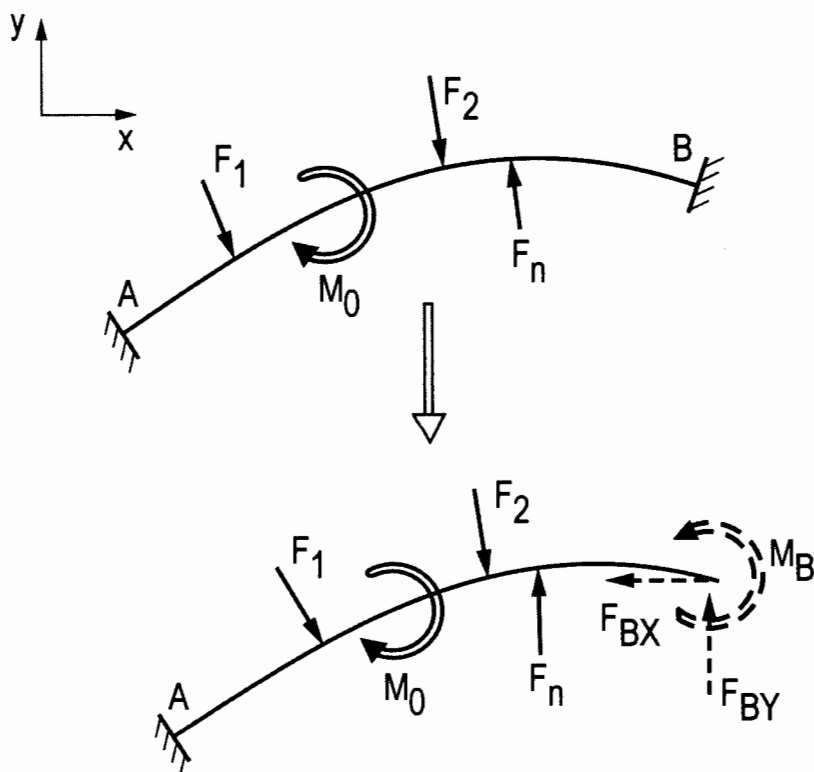


70. ábra

Egyszeresen statikailag határozatlan szerkezet

Ily módon tehát a síkbeli erők statikájában rendelkezésre álló három egyenlet mellett egy negyedik is felírható, ezért a reakcióerők meghatározhatók. Mivel

$U=W$, ezért elmondható, hogy statikailag határozatlan szerkezet megfogásain akkor reakcióerők ébrednek, amelyeknél a terhelés hatására a szerkezetben a legkisebb alakváltoztató munka halmozódik fel.



71. ábra

Háromszorosan statikailag határozatlan szerkezet

A 71. ábrán egy olyan ívelt rúd látható, melynek két végét befogás rögzíti. Mivel a befogásoknál ismeretlen a reakcióerő x- és y-irányú komponense és reakciónyomaték ezért a szerkezetnél hat ismeretlenes problémával állunk szemben. A szerkezetet például úgy tehetjük statikailag határozottá, hogy megszüntetjük a B-nél levő befogást. Ennek következtében elő kell írni, hogy a B keresztmetszet x és y irányú elmozdulása (x_B és y_B) valamint szögelfordulása φ_B zérus legyen

$$x_B = \frac{\partial U}{\partial F_{BX}} = 0,$$

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial F_{BY}} = 0,$$

$$\varphi_B = \frac{\partial U}{\partial M_B} = 0.$$

A fenti három egyenlet és síkbeli erők statikájában használatos három független egyenlet segítségével tehát a feladat megoldható.

7. VASTAG FALU CSÖVEK

Vastag falúnak tekinthető a cső, ha külső átmérőjének és falvastagságának arányára teljesül, hogy $2 < D/v < 20$. Vastag falú csövet alkalmaznak a hidraulikus sajtó nyomóvezetékeinek készítésére, ahol a nyomás 20–100 MPa értéket is eléri, ágyúcsöveknél viszont még nagyobb belső nyomással is kell számolni. Egyes vastag falúnak tekinthető vegyipari készülékek is tetemes nyomásnak vannak kitéve. Zsugorkötéseknél a felületek között jelentős nyomás keletkezik, így az agyban és a tengelyben ébredő feszültségek számítására ugyancsak az itt levezetett egyenletek alkalmasak. Az összefüggések levezetésekor érvényesnek tekintjük a következő feltételezéseket:

- a cső külső és belső nyomást egyaránt kaphat, de ezek intenzitása a cső hossza mentén nem változik,
- a cső végeinek lezárása nem gátolja a csőfal alakváltozását, de tengelyirányú erőt átadhat a csőre,
- a cső anyaga homogén, izotróp, alakváltozása a Hooke-törvénynek megfelelően rugalmas,
- a cső külső és belső palástja koncentrikus körhenger,
- a cső hossz tengelyére merőleges síkok a cső alakváltozása után is síkok maradnak.

A p_b belső és p_k külső nyomással terhelt cső falából két koncentrikus hengerfelszínnel és két egymással szöget bezáró és a cső tengelyén átmenő síkkal vágjunk ki a csőtengely irányában egységnyi hosszúságú hasábot (72. ábra). Rajzoljuk fel az elemi hasáb lapjára ható feszültségeket. A cső terhelésének és alakváltozásának szimmetriájából következik, hogy

- a σ_t érintőirányú és a σ_a tengelyirányú feszültség a kivágott elem két-két szemközti lapján egyenlő,
- a σ_r sugárirányú feszültség (amit pozitív értelműnek rajzoltunk) az r sugár függvényében változik, értéke az $r+dr$ sugáron $\sigma_r+d\sigma_r$,
- az elemi hasáb lapjain csúsztatófeszültségek nem ébrednek, mert lapszögeik az alakváltozás után is derékszögek maradnak. Emiatt a σ_n , σ_t és σ_a feszültségek egyúttal főfeszültségek.

Az elemi hasáb a csőfal rugalmas alakváltozása során sugárirányban u -val, illetve külső palástja $u+du$ értékkel elmozdul. Fajlagos hosszváltozása sugárirányban

$$\varepsilon_r = \frac{u + du - u}{dr} = \frac{du}{dr}.$$

Az érintőirányú fajlagos nyúlást a kerület hosszváltozása alapján számítjuk

$$\varepsilon_t = \frac{2(r+u)\pi - 2r\pi}{2r\pi} = \frac{u}{r}.$$

Feltételezésünk szerint a cső hossza is megváltozhat, tehát lesz tengelyirányú nyúlás is, amelynek ε_a nagyságát nem ismerjük. Az ε_r , ε_t és ε_a nyúlások iránya a főfeszültségek irányával megegyezik.

A Hooke-törvény alapján a feszültségek és a fajlagos nyúlások között az alábbi összefüggés áll fenn

$$E\varepsilon_t = \sigma_t - \nu\sigma_r,$$

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \nu\sigma_t.$$

Az ε_t és ε_r értékét a fenti összefüggésekbe behelyettesítve kifejezhetjük a σ_t és σ_r értékét

$$\sigma_t = E \frac{u}{r} + \nu\sigma_r,$$

és

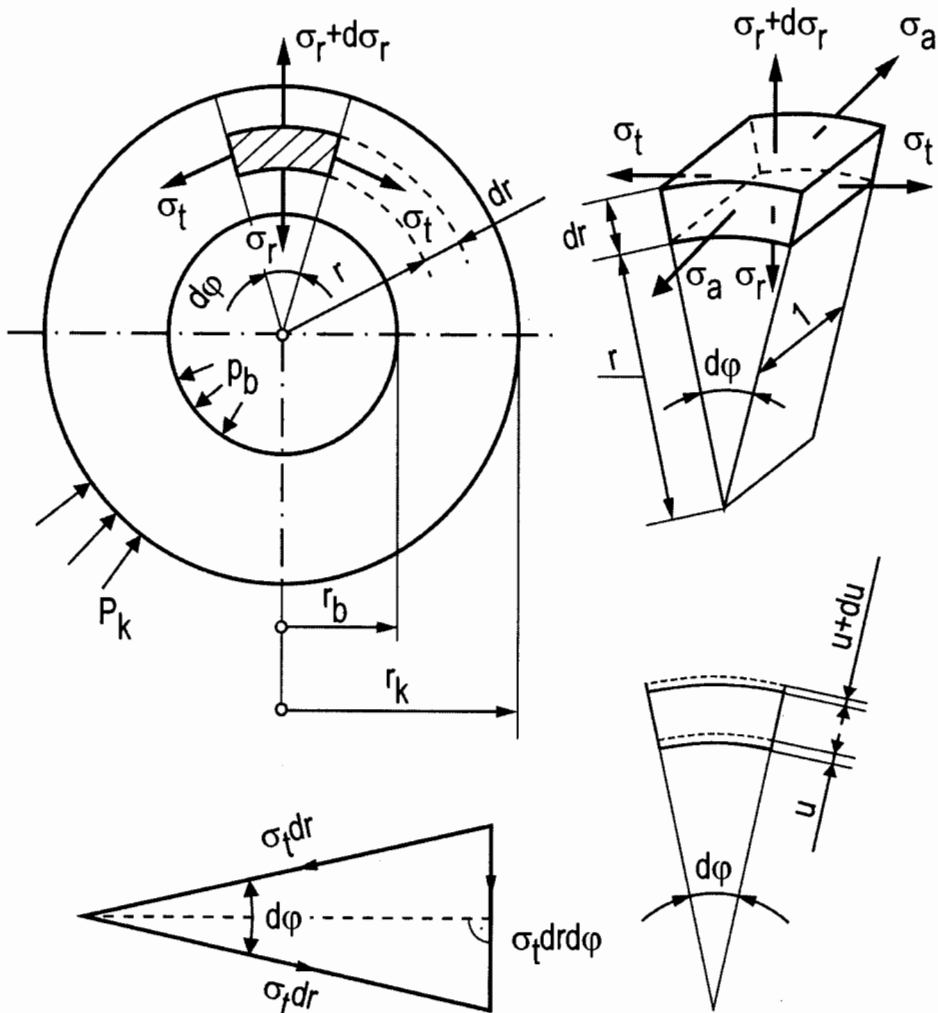
$$\sigma_r = E \frac{du}{dr} + \nu\sigma_t.$$

A σ_r -re kapott összefüggést a σ_t képletébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\sigma_t = E \frac{u}{r} + \nu E \frac{du}{dr} + \nu^2 \sigma_r$$

innen

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right)$$



72. ábra

A vastag falú cső feszültségei

A fenti egyenletet a σ_r radiális feszültség képletébe helyettesítve adódik, hogy

$$\sigma_r = E \frac{du}{dr} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{u}{r} + \frac{\nu^2 E}{1-\nu^2} \frac{du}{dr},$$

innen

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right).$$

A 72. ábra alapján a sugárirányú erőegyensúlyi egyenlet

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi - \sigma_r r d\varphi - \sigma_t dr d\varphi = 0,$$

rendezés után

$$[(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) - \sigma_r r] - \sigma_t dr = 0.$$

A szögletes zárójelben levő különbség a $\sigma_r r$ szorzat differenciális változása

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_t = 0.$$

A differenciálás elvégzése után

$$\frac{d\sigma_r}{dr} r + \sigma_r - \sigma_t = 0$$

és r -rel való osztás révén adódik, hogy

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0.$$

A σ_r és σ_t értékét a fenti egyenletbe helyettesítve rendezés után adódik, hogy

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0.$$

A fenti Euler-típusú homogén másodrendű differenciálegyenlet megoldása a következő alakban kereshető

$$u = K_1 r + \frac{K_2}{r},$$

illetve

$$\frac{du}{dr} = K_1 - \frac{K_2}{r^2},$$

ahol K_1 és K_2 a peremfeltételektől (külső és belső nyomástól) függő állandók. A fenti megoldást illetve annak deriváltját a σ_t illetve σ_r összefüggésébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left(K_1 + \frac{K_2}{r^2} + K_1 \nu - \frac{K_2 \nu}{r^2} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[K_1 (1+\nu) + \frac{K_2}{r^2} (1-\nu) \right],$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(K_1 - \frac{K_2}{r^2} + \nu K_1 + \nu \frac{K_2}{r^2} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[K_1 (1+\nu) - \frac{K_2}{r^2} (1-\nu) \right].$$

A K_1 és K_2 meghatározásához két peremfeltétel áll rendelkezésre. A fenti két egyenletet átalakítva és a második tagot $\frac{r_b^2}{r^2}$ -vel megszorozva adódik, hogy

$$\sigma_t = \frac{EK_1}{1-\nu} + \frac{1}{r^2} \frac{EK_2}{1+\nu} \frac{r_b^2}{r^2},$$

$$\sigma_r = \frac{EK_1}{1-\nu} - \frac{1}{r^2} \frac{EK_2}{1+\nu} \frac{r_b^2}{r^2}.$$

Bevezetve a

$$B = \frac{EK_1}{1-\nu}, \quad \text{illetve a} \quad C = \frac{EK_2}{1+\nu} \frac{1}{r_b^2}$$

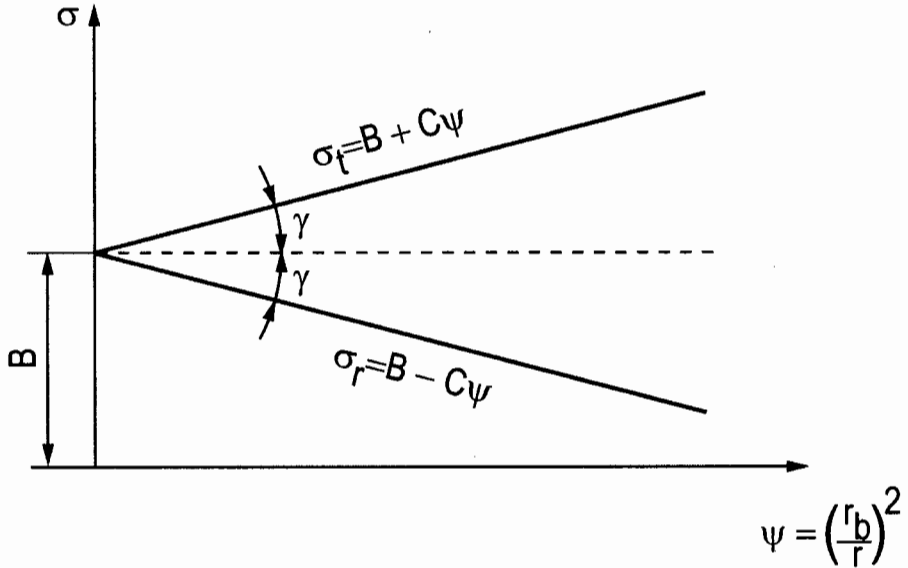
jelölést kapjuk, hogy

$$\sigma_t = B + C \left(\frac{r_b}{r} \right)^2,$$

$$\sigma_r = B - C \left(\frac{r_b}{r} \right)^2.$$

A kapott összefüggések értelmében e két feszültség hiperbolikusan változik a sugár függvényében.

Célszerű bevezetni a $\psi = \left(\frac{r_b}{r}\right)^2$ dimenzió nélküli mennyiséget, így a σ, ψ koordinátarendszerben a feszültségek változása a 73. ábra szerint alakul.



73. ábra

A tangenciális és radiális feszültségek változása

Ha adott a p_b belső és a p_k külső nyomás, valamint a cső mérete (r_b és r_k), akkor a σ_r egyenese könnyen megrajzolható (74. ábra). A belső sugárnak megfelel a

$\psi_b = \left(\frac{r_b}{r_b}\right)^2 = 1$, a külsőnek pedig a $\psi_k = \left(\frac{r_b}{r_k}\right)^2 < 1$. E két értéknél ábrázolhatók az adott nyomások (mindkettő negatív előjelű sugárirányú feszültség). Ha a

(ψ_b, p_b) és (ψ_k, p_k) pontokat összekötjük, akkor ez a σ tengelyen kimetszi a B értékét. Ebből a pontból γ szög alatt húzott másik egyenes a σ_t változását szemlélteti. A $\psi_b=1$ és ψ_k értéknél lemérhető a σ_t feszültségek nagysága. Az ábrán látható hasonló háromszögek alapján

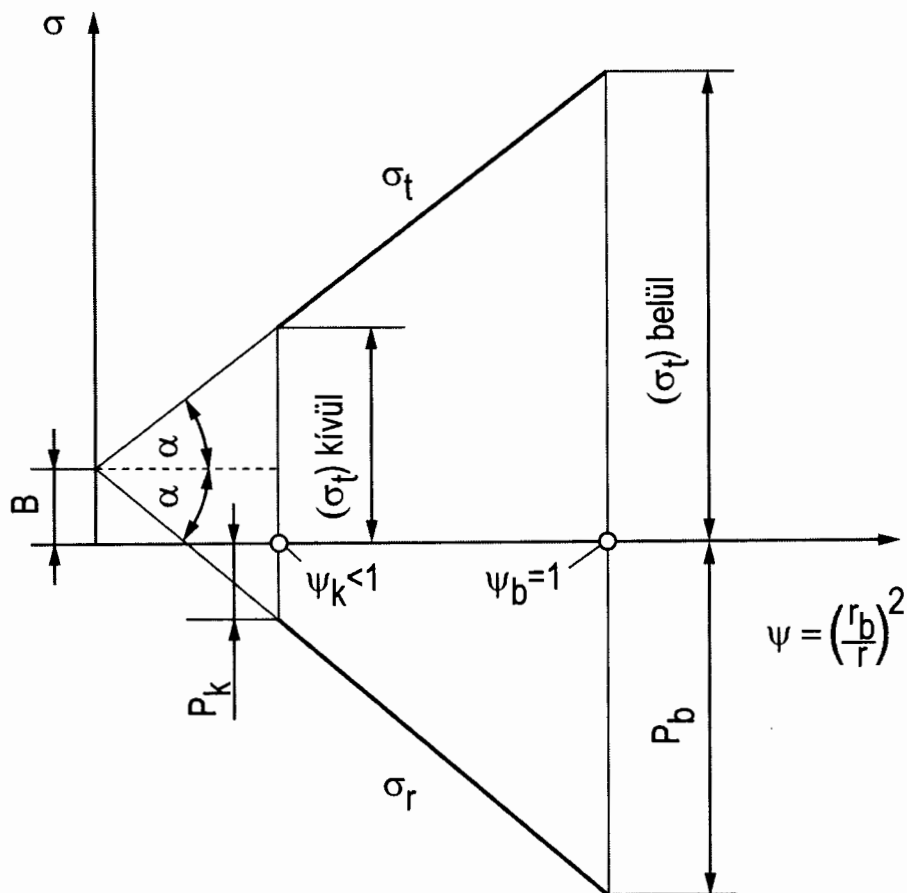
$$\frac{B + p_b}{l} = \frac{B + p_k}{\psi_k},$$

innen

$$B = \frac{p_b r_b^2 - p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2}$$

és

$$\operatorname{tg} \gamma = C = \frac{p_b - p_k}{l - \psi_k} = \frac{r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} (p_b - p_k).$$



74. ábra

A tangenciális és radiális feszültségek változása a csőfalban

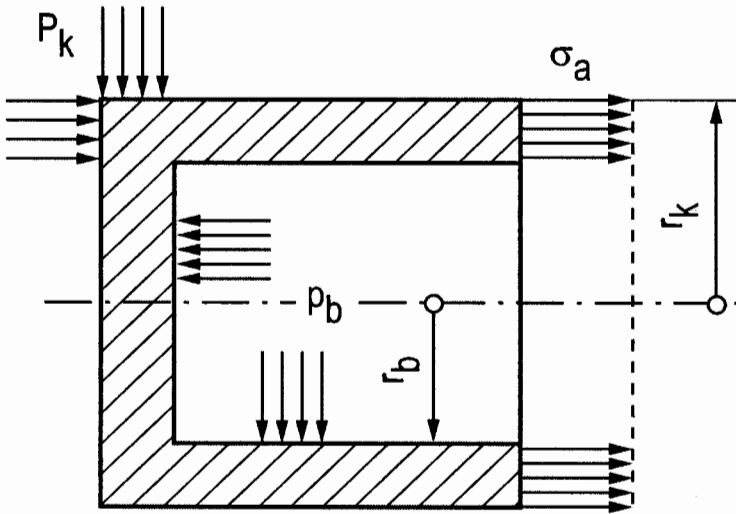
Az eredmények felhasználásával a tangenciális feszültségek a cső belső falán

$$\begin{aligned}\sigma_{ib} &= B + C = \frac{p_b r_b^2 - p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} + \frac{r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} (p_b - p_k) = \\ &= \frac{p_b (r_k^2 + r_b^2) - 2p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2}\end{aligned}$$

és a külső falán

$$\sigma_{ik} = B + C \psi_k = \frac{p_b r_b^2 - p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} + \left(\frac{r_b}{r_k} \right)^2 \frac{r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} (p_b - p_k) = \frac{2p_b r_b^2 - p_k (r_k^2 + r_b^2)}{r_k^2 - r_b^2}.$$

A cső hossz tengelye menti feszültség számítása céljából feltételezzük, hogy vastagfalú cső mindkét vége zárt. A csövet p_b belső és p_k külső nyomás terheli (75. ábra).



75. ábra

A keresztirányban elmetszett csőszakasz egyensúlya

A vázolt csőszakasz egyensúlya alapján írható, hogy

$$\sigma_a (r_k^2 - r_b^2) \pi - p_b r_b^2 \pi + p_k r_k^2 \pi = 0,$$

ebből

$$\sigma_a = \frac{p_b r_b^2 - p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} = B.$$

Ha nagyság szerint rendezzük a feszültségeket, akkor

$$\sigma_r < \sigma_a < \sigma_t$$

összefüggés adódik. Mivel mindhárom feszültség főfeszültség, ezért

$$\sigma_t = \sigma_1,$$

$$\sigma_a = \sigma_2,$$

$$\sigma_r = \sigma_3.$$

Ezekkel az adatokkal Mohr-szerinti redukált feszültség

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Ellenőrzéskor teljesülni kell a következő összefüggésnek

$$\sigma_{red} \leq \sigma_{meg}.$$

Belső nyomással terhelt cső

A csőnél érvényes peremfeltételek a következők

$$r=r_k\text{-nál: } p_k=0, \quad \sigma_{rk}=0;$$

$$r=r_b\text{-nél: } p_b=p, \quad \sigma_{rb}=-p.$$

A tangenciális feszültségkomponenseket a σ_r -re vonatkozó összefüggésből tudjuk meghatározni. Behelyettesítés és rendezés után

$$\sigma_{tb} = \frac{p(r_k^2 + r_b^2)}{r_k^2 - r_b^2}$$

és a tangenciális feszültség kívül

$$\sigma_{tk} = \frac{2pr_b^2}{r_k^2 - r_b^2}$$

Az eredményekből látható, hogy $\sigma_{tk} < \sigma_{tb}$ és a tangenciális feszültségek változása hiperbolikus.

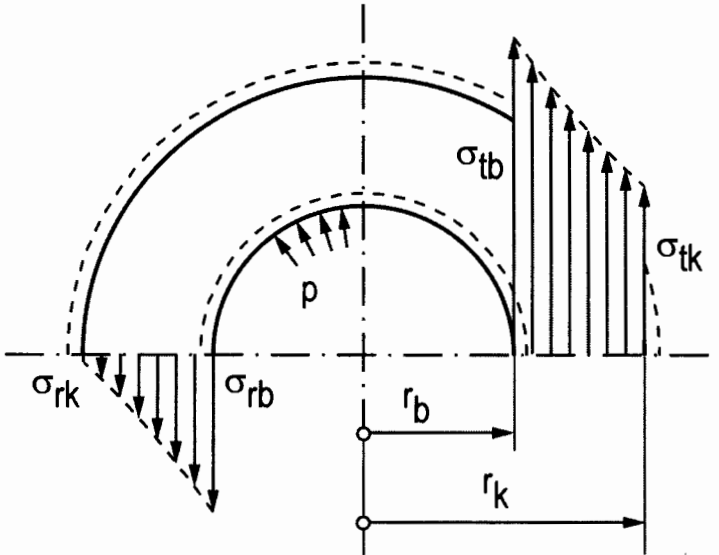
A radiális feszültség belül

$$\sigma_{rb} = -p,$$

illetve kívül

$$\sigma_{rk} = 0.$$

A feszültségek lefutását a 76. ábra mutatja.



76. ábra

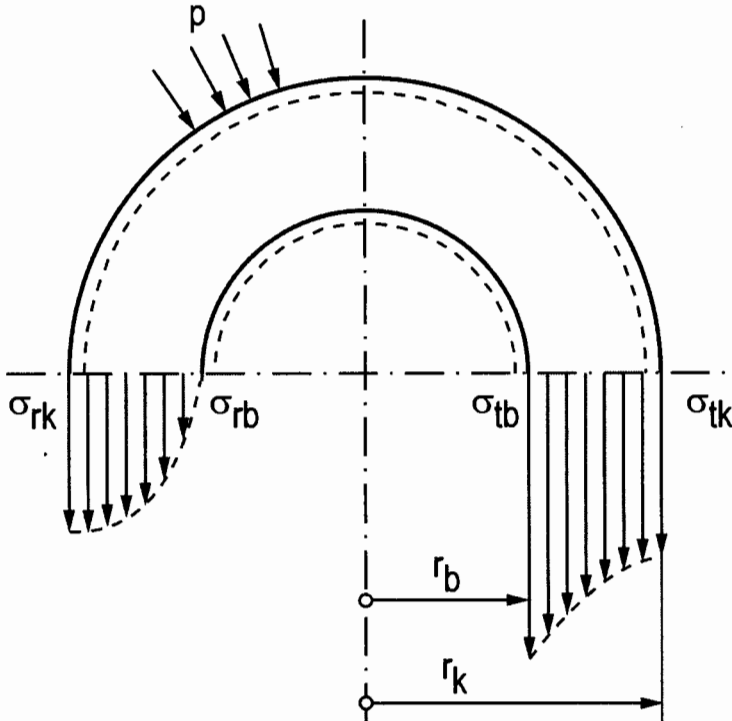
**A tangenciális és radiális feszültségek
belső nyomással terhelt cső esetén**

Külső nyomással terhelt cső

A külső nyomással terhelt cső feszültségállapotának meghatározásakor a következő peremfeltételek érvényesek

$$r=r_k\text{-nál: } p_k=p, \quad \sigma_{rk}=-p,$$

$$r=r_b\text{-nél: } p_b=0, \quad \sigma_{rb}=0.$$



77. ábra

A tangenciális és radiális feszültségek külső nyomással terhelt cső esetén

A tangenciális feszültségkomponensek meghatározásához a σ_r -re kapott összefüggés használható. Ennek megfelelően a tangenciális feszültség belül

$$\sigma_{tb} = \frac{-2pr_k^2}{r_k^2 - r_b^2},$$

és a tangenciális feszültség kívül

$$\sigma_{ik} = \frac{-p(r_k^2 + r_b^2)}{r_k^2 - r_b^2}.$$

A feszültségek sugár menti változását a 77. ábra mutatja.

A feszültségek ismeretében a fajlagos nyúlások is meghatározhatók.

A redukált feszültség számítása belső nyomással terhelt cső esetén

A levezetett összefüggések felhasználásával megvizsgáljuk a $p_b=p$ belső nyomással terhelt csövet, ha a külső nyomás zérus $p_k=0$. A redukált feszültség

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{ib} - \sigma_{rb} = \frac{p(r_k^2 + r_b^2)}{r_k^2 - r_b^2} + p = \frac{2pr_k^2}{r_k^2 - r_b^2}.$$

Az anyagra megengedett feszültség legyen σ_{meg} , ami éppen egyezzen meg a redukált feszültséggel

$$\sigma_{red} = \sigma_{meg} = \frac{2pr_k^2}{r_k^2 - r_b^2},$$

innen

$$\sigma_{meg}(r_k^2 - r_b^2) = 2pr_k^2$$

és r_b^2 -vel való osztás és rendezés után

$$\sigma_{meg} \frac{r_k^2}{r_b^2} - \sigma_{meg} = 2p \frac{r_k^2}{r_b^2}$$

adódik. Átalakítás után

$$\frac{r_k^2}{r_b^2}(\sigma_{meg} - 2p) = \sigma_{meg},$$

innen

$$\frac{r_k}{r_b} = \sqrt{\frac{\sigma_{meg}}{\sigma_{meg} - 2p}}$$

összefüggés adódik. Látható, hogy ha $2p$ közeledik σ_{meg} -hez, akkor az r_k/r_b érték a végtelenhez tart. Ez azt jelenti hogy a p belső nyomásnak van egy határértéke, ami mellett a cső falvastagsága (külső átmérője) végtelenre adódik. Ilyen nagy belső nyomás esetén a műszaki feladatot egyetlen vastag falú csővel nem lehet megoldani. Ekkor a csövet két vagy több részből kell készíteni, melyeket túlfedéssel kell egymásra húzni a zsigorkötéshez hasonlóan. Létezik egy olyan módszer is, amikor a csövet nagy belső nyomással túlterhelik (maradó alakváltozást hoznak létre). A belső nyomás megszüntetése után a maradó feszültségek eloszlása az egymásra húzott csövek feszültségeloszlásához hasonlít. Ezt a módszert autofrettage eljárásnak nevezik.



8. KIDOLGOZOTT FELADATOK

8.1. A feszültségi állapot Mohr-féle ábrázolása

Feladat:

Egy rúd K keresztmetszetének P pontjában a feszültségkomponensek a következők:

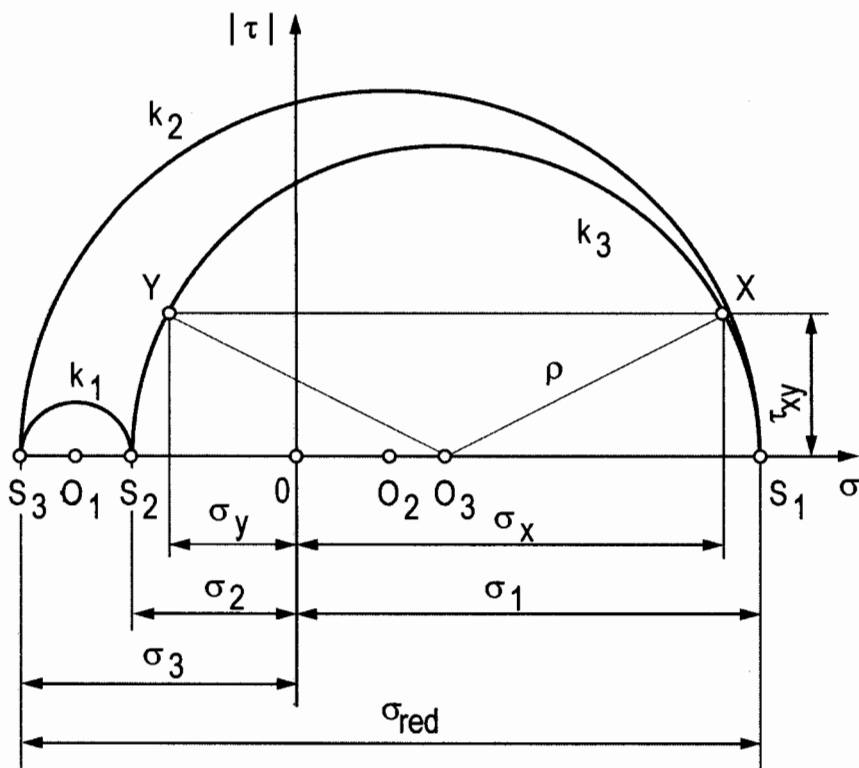
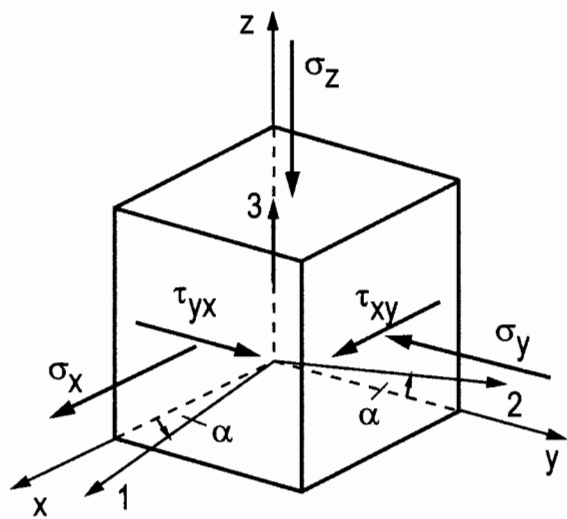
$$\sigma_x = 60 \text{ MPa}; \sigma_y = -20 \text{ MPa}; \sigma_z = -40 \text{ MPa}; \tau_{xy} = \tau_{yx} = 20 \text{ MPa}; \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

- Írjuk fel a feszültségtenzort és rajzoljuk meg a feszültségállapot Mohr-körét!
- A Mohr-kör alapján számítsuk ki a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat!

Megoldás:

- A feszültségtenzor

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 60 & 20 & 0 \\ 20 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}.$$



78. ábra

A P pont feszültségi állapota

A Mohr-kör megrajzolását segíti, ha a P pont környezetéből kivett kiskockára felrajzoljuk a feszültségkomponenseket (78. ábra). Az ábráról látható, hogy a felső lapon csak z -irányú normál feszültség ébred, ezért e sík főfeszültségi sík és a z -tengely egyúttal főirány. A hozzátartozó feszültség -40 MPa.

A kiskocka alapján láthatjuk, hogy a feszültségi Mohr-kör egyik pontját az $X(60; 20)$ a másikat az $Y(-20; 20)$ pont alkotja. E pontok ismeretében a feszültségi állapot Mohr-köre a 6. ábra szerint megrajzolható. A kör által kimetszett S_1 és S_2 pontok megadják a σ_1 és σ_2 főfeszültségeket.

b) A főfeszültségek nagyságát az ábra alapján egyszerűen meg tudjuk határozni

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \overline{OO_3} + \rho = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{60\text{MPa} - 20\text{MPa}}{2} + \sqrt{\left(\frac{60\text{MPa} + 20\text{MPa}}{2}\right)^2 + (20\text{MPa})^2} = \\ &= 20\text{MPa} + 44,72\text{MPa} = 64,72\text{MPa},\end{aligned}$$

$$\sigma_2 = \overline{OO_3} - \rho = 20\text{MPa} - 44,72\text{MPa} = -24,72\text{MPa}.$$

Az 1-es főirány és az x -tengely által bezárt α szöget az ábra alapján határozzuk meg

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}2\alpha &= \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{40\text{MPa}}{60\text{MPa} + 20\text{MPa}} \\ &= 0,5 \operatorname{rad},\end{aligned}$$

innen

$$2\alpha = 26,565^\circ \quad \alpha = 13,283^\circ.$$

A 6. ábra kapcsán láttuk, hogy a Mohr-körön az elfordulás a valósághoz képest kétszeres szöggel történik, azért az x -tengely és az 1-es főtengely által bezárt

szög $\alpha=13,283^\circ$. Ezt az értéket az x-tengelyhez képest az óramutató járásával ellentétesen felmérve megkapjuk az 1-es főirányt.

8.2. Húzás

Feladat:

A 79. ábrán látható függőleges huzalt saját súlyán kívül az F erő is terheli.

- Ellenőrizzük a huzalt és rajzoljuk meg a feszültségeloszlást a rúd hossza mentén!
- Ha $l_o=50\text{ m}$, akkor maximálisan mekkora lehet az F erő?
- Ha az $F=0$, akkor milyen hosszú lehet a huzal, hogy a maximális feszültség ne haladja meg a σ_{meg} értéket!
- Mekkora a huzal saját súlyából származó megnyúlása?

Adatok:

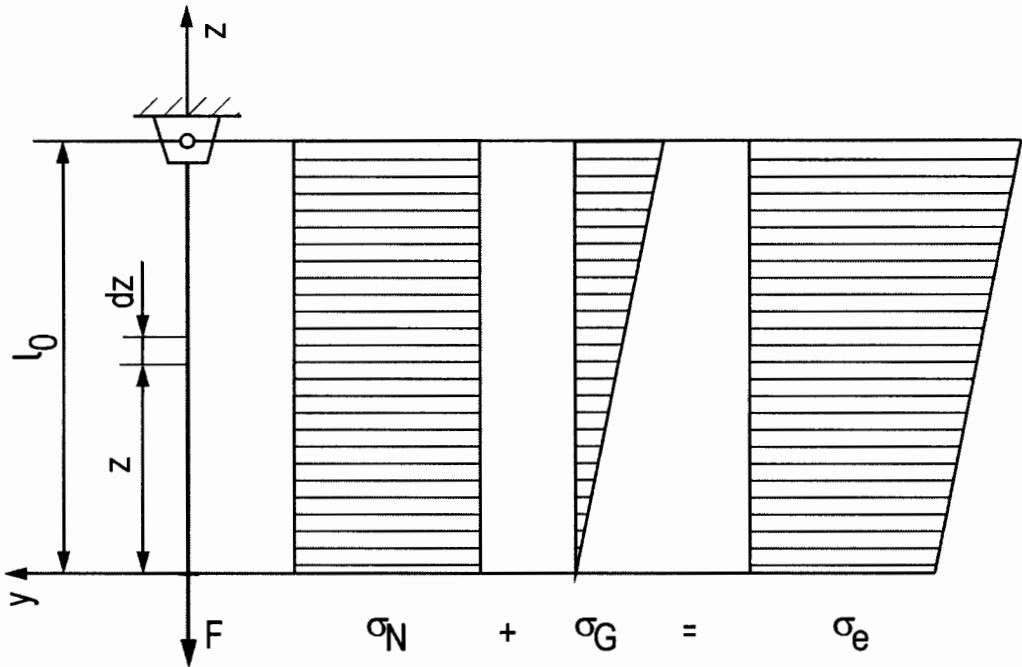
$$\sigma_{meg}=180\text{ MPa}; d=3\text{ mm}; l_o=50\text{ m}; F=900\text{ N}; \rho=7800\text{ kg/m}^3; g=10\text{ m/s}^2; \\ E=210\text{ GPa}.$$

Megoldás:

- Az F erő hatására a huzal hossza mentén minden egyes keresztmetszetben ugyanaz a σ_N húzófeszültség ébred, melynek értéke (79.ábra)

$$\sigma_N = \frac{F}{A} = \frac{900\text{ N}}{7,065\text{ mm}^2} = 127,39 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 127,39\text{ MPa}.$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{(3\text{ mm})^2 \pi}{4} = 7,065\text{ mm}^2.$$



79. ábra

Húzóerővel és saját súlyával terhelt huzal

A huzal súlyából származó feszültség maximális értékét a felfüggesztésnél éri el és szabad végéig (az F erő támadáspontjáig) lineárisan csökken egészen nulláig. A felfüggesztésnél ébredő feszültség

$$\begin{aligned}\sigma_G &= \frac{mg}{A} = \frac{Al_o\rho g}{A} = l_o\rho g = 50\text{m} \cdot 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 3,9 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 3,9\text{MPa}.\end{aligned}$$

A felfüggesztésnél ébredő eredő maximális feszültség

$$\sigma_{\max} = \sigma_N + \sigma_G = 127,39\text{MPa} + 3,9\text{MPa} = 131,29\text{MPa}.$$

A huzal eredő feszültségi állapotát (σ_e) a 79. ábra mutatja.

- b) Az 50 m hosszú huzal súlyából származó feszültség az előző pont szerint $\sigma_G=3,9 \text{ MPa}$. Az ismeretlen F_{max} erőből származó σ_N feszültség és a σ_G feszültség összegének egyenlőnek kell lennie a megengedett feszültséggel

$$\sigma_N + \sigma_G = \sigma_{meg},$$

innen az F_{max} erőből származó feszültség

$$\sigma_N = \sigma_{meg} - \sigma_G$$

és az ismeretlen

$$\begin{aligned} F_{max} &= A \sigma_N = A (\sigma_{meg} - \sigma_G) = \\ &= 7,065 \text{ mm}^2 (180 \text{ N/mm}^2 - 3,9 \text{ N/mm}^2) = 1244,15 \text{ N}. \end{aligned}$$

- c) Ha $F=0$, akkor a huzalt csak saját súlya terheli és az ebből származó maximális feszültség a felfüggesztésnél ébred, ami határesetben megegyezik a megengedett feszültséggel

$$\sigma_{max} = l_{max} \rho g = \sigma_{meg},$$

innen

$$l_{max} = \frac{\sigma_{meg}}{\rho g} = \frac{180 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2}{7800 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s}^2} = 2307,7 \text{ m}.$$

- d) A 2.1.1. fejezetben tanultak szerint egy l_0 hosszúságú rúd megnyúlása

$$\lambda = \frac{F l_0}{AE}.$$

Esetünkben a huzal megnyúlása saját súlyából származik, így az egyes keresztmetszetekben ébredő erő változik $G=G(z)$. A 79. ábra szerint a Δz hosszúságú rúdszakasz megnyúlása

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \Delta dz = \frac{G(z)\Delta z}{AE} = \frac{Az\rho g\Delta z}{AE} = \\ &= \frac{z\rho g}{E} dz.\end{aligned}$$

A teljes rúdszakasz megnyúlása

$$\begin{aligned}\lambda &= \int_0^l \Delta\lambda = \int_0^l \Delta dz = \frac{\rho g}{E} \int_0^l z dz = \frac{\rho g}{E} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^l = \\ &= \frac{\rho g l^2}{2E}.\end{aligned}$$

Behelyettesítés után a huzal saját súlyából származó megnyúlása ($l_{max}=2307,7\text{ m}$).

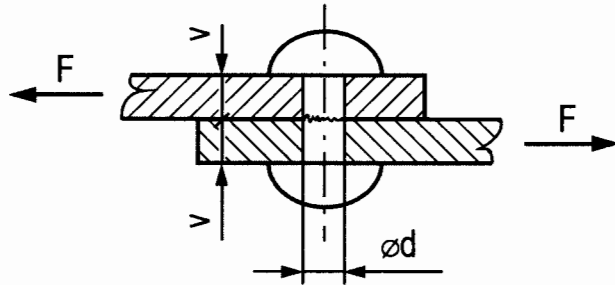
$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{7800\text{kg/m}^3 \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot (2307,7\text{m})^2}{2 \cdot 210 \cdot 10^9\text{ N/m}^2} = \\ &= 0,988\text{m}.\end{aligned}$$

Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk, ha átlagos fajlagos nyúlással számolunk.

8.3. Tiszta nyírás

Feladat:

Határozzuk meg a 80. ábrán látható szegecskötés szükséges átmérőjét és a kialakuló palástnyomást!



80. ábra

Egyszeresen nyírt szegecskötés

Adatok:

$$F=6 \text{ kN}; \tau_{meg}=120 \text{ MPa}; v=10 \text{ mm.}$$

Megoldás:

A szegecs keresztmetszete a tört vonal mentén tiszta nyírásra van igénybe véve. A keresztmetszetben ébredő átlagos nyírófeszültség

$$\tau = \frac{F}{A} = \tau_{meg}.$$

Az $A = \frac{d^2 \pi}{4}$ érték behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\tau_{meg}\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6000N}{120 \cdot 10^6 N/m^2 \pi}} = 0,00798m = 7,98mm \approx 8mm.$$

A palástnyomást a 20. ábra szerint a vd felület veszi fel, így értéke

$$p = \frac{F}{vd} = \frac{6000N}{10mm \cdot 8mm} = 75 \frac{N}{mm^2} = 75MPa.$$

8.4. Hajlítás

Feladat:

A 81. ábrán látható T-szelvényű tartót $M_{hx}=1,5 \text{ kNm}$ hajlítónyomaték terheli. Határozzuk meg a normál feszültségek eloszlását az y-tengely mentén, valamint számítsuk ki a rúd görbületi sugarát! ($E=200 \text{ GPa}$)

Megoldás:

Először meg kell határozni a súlyponti x-tengely helyét a statikában tanultak szerint. A tartót két részre bontjuk: az 1-es jelű felső övre és a 2-es jelű függőleges gerincre, így a súlyponti tengely helye

$$y_s = \frac{y_{s1}A_1 + y_{s2}A_2}{A} = \frac{26,5\text{mm} \cdot 25\text{mm} \cdot 7\text{mm} + 11,5\text{mm} \cdot 5\text{mm} \cdot 23\text{mm}}{25\text{mm} \cdot 7\text{mm} + 5\text{mm} \cdot 23\text{mm}} = 20,55\text{mm}.$$

A súlyponti x-tengelyre számított másodrendű nyomaték

$$\begin{aligned} I_x &= I_{s1} + (y_{s1} - y_s)^2 A_1 + I_{s2} + (y_s - y_{s2})^2 A_2 = \\ &= \frac{25\text{mm}(7\text{mm})^3}{12} + (5,95\text{mm})^2 175\text{mm}^2 + \\ &+ \frac{5\text{mm}(23\text{mm})^3}{12} + (9,05\text{mm})^2 115\text{mm}^2 = \\ &= 715\text{mm}^4 + 6195\text{mm}^4 + 5070\text{mm}^4 + 9418\text{mm}^4 = \\ &= 21398\text{mm}^4. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sigma_{zA} &= \frac{M_{hx}}{I_x} y_A = \frac{1,5 \cdot 10^5 \text{ Nmm}}{21398 \text{ mm}^4} 9,45 \text{ mm} = 66,24 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \\ &= 66,24 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

A maximális nyomófeszültség a tartó keresztmetszetének alsó szála mentén ébred

$$\begin{aligned}\sigma_{zB} &= \frac{M_{hx}}{I_x} y_B = \frac{1,5 \cdot 10^5 \text{ Nmm}}{21398 \text{ mm}^4} (-20,55 \text{ mm}) = -144,06 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \\ &= -144,06 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

A normál feszültségek y-tengely menti eloszlását a 81. ábra mutatja.
A rúd görbületi sugara

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{I_x E}{M_{hx}} = \frac{21398 \text{ mm}^4 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2}{1,5 \cdot 10^5 \text{ Nmm}} = 28530,7 \text{ mm} = \\ &= 28,53 \text{ m}.\end{aligned}$$

8.5. A rugalmas szál differenciálegyenlete

Feladat:

A 82. ábrán látható $l=3\text{ m}$ hosszúságú, egyik végén befogott rúd szabad végét $F=30\text{ kN}$ erő és $M_o=50\text{ kNm}$ nyomaték terheli.

- Határozzuk meg a rúd szabad végének elmozdulását a rugalmas szál egyenletének segítségével!
- A rúd melyik pontjának elmozdulása lesz a legnagyobb és mekkora ez az érték?
($IE=4\cdot 10^7\text{ Nm}^2$)

Megoldás:

- A rugalmas szál differenciálegyenlete

$$y'' = -\frac{M_{hx}}{I_x E}.$$

A hajlító nyomaték a K-keresztmetszetben

$$M_{hx} = -M_o + Fz,$$

ezt az értéket a differenciálegyenletbe helyettesítve adódik, hogy

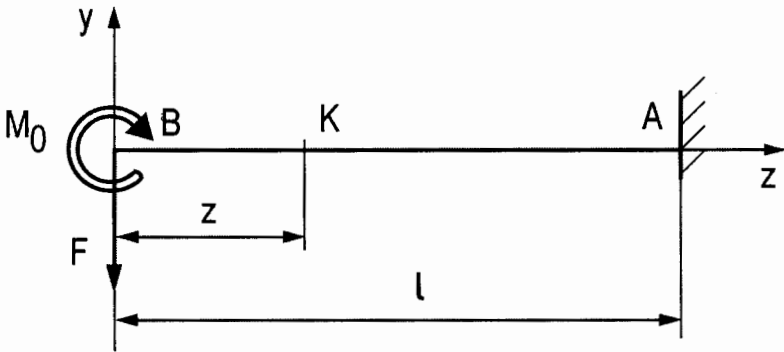
$$y'' = \frac{M_o - Fz}{I_x E}.$$

Integrálás után

$$y' = \frac{1}{I_x E} \left(M_o z - F \frac{z^2}{2} \right) + C_1,$$

majd újbóli integrálás után

$$y = \frac{1}{I_x E} \left(M_o \frac{z^2}{2} - F \frac{z^3}{6} \right) + C_1 z + C_2.$$



82. ábra
A befogott tartó terhelése

A C_1 és C_2 integrálási állandók meghatározásához a $z=l$ helyen teljesülni kell az $y' = \varphi = 0$ peremfeltételnek, vagyis a $z=l$ helyen a tartó keresztmetszetének szögelfordulása zérus

$$0 = y' = \varphi = \frac{1}{I_x E} \left(M_o l - F \frac{l^2}{2} \right) + C_1,$$

innen

$$C_1 = \frac{1}{I_x E} \left(F \frac{l^2}{2} - M_o l \right).$$

A C_1 értékét a rugalmas szál egyenletébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$y = \frac{1}{I_x E} \left(M_o \frac{z^2}{2} - F \frac{z^3}{6} + F \frac{l^2}{2} z - M_o l z \right) + C_2.$$

A C_2 állandó meghatározása céljából azt a peremfeltételt használjuk, hogy $z=l$ helyen az y -irányú elmozdulás zérus $y=0$,

$$y=0 = \frac{1}{I_x E} \left(M_o \frac{l^2}{2} - F \frac{l^3}{6} + F \frac{l^3}{2} - M_o l^2 \right) + C_2,$$

innen

$$C_2 = \frac{1}{I_x E} \left(-M_o \frac{l^2}{2} + F \frac{l^3}{6} - F \frac{l^3}{2} + M_o l^2 \right) = \frac{1}{I_x E} \left(\frac{M_o l^2}{2} - \frac{Fl^3}{3} \right).$$

A rugalmas szál egyenlete a C_1 és C_2 állandók behelyettesítés után

$$y = \frac{1}{6I_x E} \left[M_o (3z^2 - 6lz + 3l^2) - F(z^3 - l^2 z + 2l^2) \right].$$

A rúd végének lehajlása a $z=0$ helyen

$$y_B = \frac{1}{6I_x E} (3M_o^2 l^2 - 2Fl^3) = \frac{M_o l^2}{2I_x E} - \frac{Fl^3}{3I_x E}.$$

Az ismert értékek behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$y_B = \frac{1}{4 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2} \left[\frac{5 \cdot 10^7 \text{ nm} (3000 \text{ mm})^2}{2} - \frac{3 \cdot 10^4 (3000 \text{ mm})^3}{3} \right] = -1,125 \text{ mm}.$$

b) A maximális elmozdulás számítása

A rúd maximális elmozdulása esetünkben ott van, ahol a meggörbült középvonalának érintője vízszintes, azaz $y'=0$

$$0 = y' = \frac{I}{I_x E} \left(M_o z - F \frac{z^2}{2} - M_o l + F \frac{l^2}{2} \right).$$

A másodfokú egyenlet megoldása után a

$$z_1 = l,$$

illetve a

$$z_2 = \frac{2M_o}{F} - l$$

érték adódik. Közülük mechanikai szempontból a z_2 -es értéknek van realitása, vagyis

$$z_2 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^7 \text{ Nmm}}{3 \cdot 10^4 \text{ N}} - 3 \cdot 10^3 \text{ mm} = 333,3 \text{ mm}.$$

Ezen érték behelyettesítése után a tartó maximális elmozdulása

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{I}{6 \cdot 4 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2} \left\{ 5 \cdot 10^7 \text{ Nmm} \left[3(333,3 \text{ mm})^2 - 6 \cdot 3000 \text{ mm} \cdot 333,3 \text{ mm} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. 3(3000 \text{ mm})^2 \right] - 3 \cdot 10^4 \text{ N} \left[(333,3 \text{ mm})^3 - 3 \cdot (3000 \text{ mm})^2 \cdot 333,3 \text{ mm} + 2(3000 \text{ mm})^3 \right] \right\} = \\ &= -1,185 \text{ mm}. \end{aligned}$$

8.6. Csavarás

Feladat:

Határozzuk meg a 83. ábrán látható csőtengelyben ébredő maximális feszültségeket és a két végső keresztmetszet egymáshoz viszonyított relatív elcsavaródását!

Adatok:

$$M_c = 8 \text{ kNm}; \quad d = 50 \text{ mm}; \quad D_1 = 80 \text{ mm}; \quad D_2 = 120 \text{ mm}; \quad l_1 = 1000 \text{ mm}; \quad l_2 = 400 \text{ mm}; \\ G = 80 \text{ GPa}.$$

Megoldás:

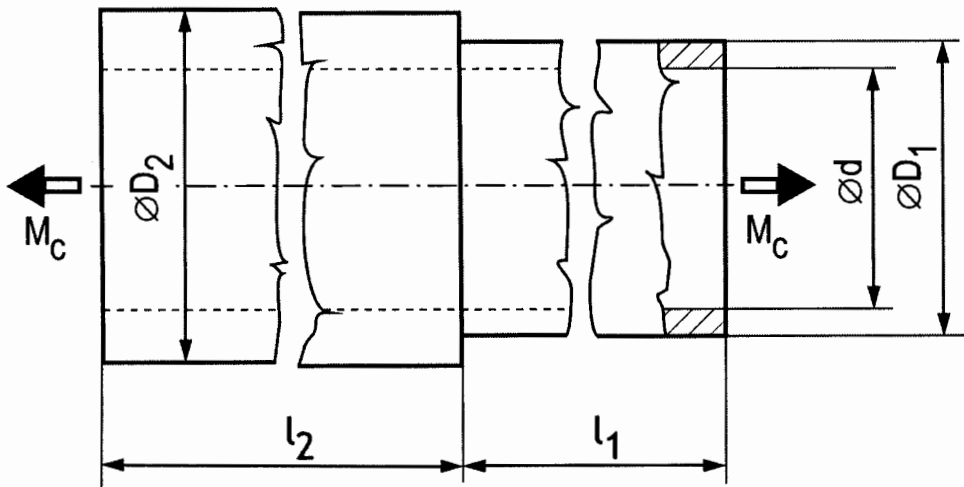
A csavarásból származó feszültségek számításához szükség van a csőtengely szakaszok poláris keresztmetszeti tényezőjére

$$I_{p1} = \frac{\pi}{32}(D_1^4 - d^4) = \frac{\pi}{32}(80^4 - 50^4) \text{ mm}^4 = \\ = 4,0192 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 - 6,1328 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 = \\ = 3,4059 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$K_{p1} = \frac{I_{p1}}{D_1/2} = \frac{3,4059 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{40 \text{ mm}} = 8,5148 \cdot 10^4 \text{ mm}^3.$$

$$I_{p2} = \frac{\pi}{32}(D_2^4 - d^4) = \frac{\pi}{32}(120^4 - 50^4) \text{ mm}^4 = 2,0347 \cdot 10^7 \text{ mm}^4,$$

$$K_{p2} = \frac{I_{p2}}{D_2/2} = \frac{2,0347 \cdot 10^7 \text{ mm}^4}{60 \text{ mm}} = 3,289 \cdot 10^5 \text{ mm}^3.$$



83. ábra
Csavarásra igénybevett csőtengely

A csavarásból származó csúsztató feszültségek eloszlása csőtengely esetén is lineárisan változik a sugár függvényében. A maximális értékét a 2.4.1. fejezetben megismert összefüggéssel számíthatjuk

$$\tau_{max1} = \frac{M_c}{K_{p1}} = \frac{8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{8,5148 \cdot 10^4 \text{ mm}^3} = 93,95 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 93,95 \text{ MPa},$$

$$\tau_{max2} = \frac{M_c}{K_{p2}} = \frac{8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{3,289 \cdot 10^5 \text{ mm}^3} = 24,32 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 24,32 \text{ MPa}.$$

A szögelfordulásokat ugyancsak a 2.4.1. fejezetben megismert

$$\varphi = \frac{M_c l}{I_p G}$$

összefüggéssel számíthatjuk. Esetünkben a szögelfordulásokat külön-külön meg kell határozni az állandó keresztmetszetű tengelyszakaszokra majd összegezni kell őket

$$\begin{aligned}\varphi_{max} &= \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{M_c l_1}{I_{p1} G} + \frac{M_c l_2}{I_{p2} G} = \\ &= \frac{M_c}{G} \left(\frac{l_1}{I_{p1}} + \frac{l_2}{I_{p2}} \right) = \\ &= \frac{8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2} \left(\frac{1000 \text{ mm}}{3,4059 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} + \frac{400 \text{ mm}}{1,9734 \cdot 10^7 \text{ mm}^4} \right) = \\ &= 0,03139 \text{ rad} = 1,8^\circ.\end{aligned}$$

8.7. Központosan nyomott rúd kihajlása

Feladat:

Határozzuk meg, hogy a 84. ábrán látható $l=1,5\text{ m}$ hosszú zárt szelvényből készült acélrúd maximálisan mekkora erővel terhelhető, ha a biztonság $n=2$ -szeres! Az arányossági határhoz tartozó karcsúsági tényező $\lambda_p=105$ és $E=210\text{ GPa}$.

Megoldás:

A számításhoz szükséges keresztmetszet és másodrendű nyomatékok értéke:

$$A=40\text{ mm} \cdot 60\text{ mm} - 34\text{ mm} \cdot 54\text{ mm}=564\text{ mm}^2,$$

az x-tengelyre számított másodrendű nyomaték

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{40\text{ mm}(60\text{ mm})^3}{12} - \frac{34\text{ mm}(54\text{ mm})^3}{12} = \\ &= 720000\text{ mm}^4 - 446148\text{ mm}^4 = 273852\text{ mm}^4, \end{aligned}$$

az y-tengelyre számított másodrendű nyomaték

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{60\text{ mm}(40\text{ mm})^3}{12} - \frac{54\text{ mm}(34\text{ mm})^3}{12} = \\ &= 320000\text{ mm}^4 - 176868\text{ mm}^4 = 143132\text{ mm}^4. \end{aligned}$$

Mivel az y-tengelyre számított másodrendű nyomaték a kisebb, ezért a rúd az y-tengelyre merőlegesen hajlik ki, tehát $I_{\min}=I_2=I_y$.

A rúd kihajló hossza

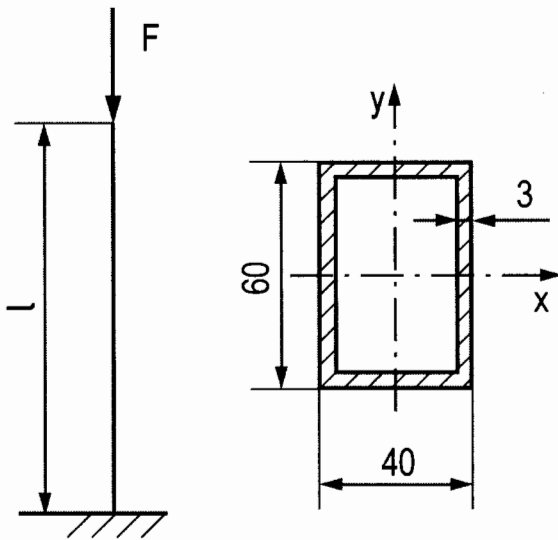
$$l_o=\beta l=2 \cdot 1500\text{ mm}=3000\text{ mm}.$$

Az inerciasugár

$$i = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{143132 \text{mm}^4}{564 \text{mm}^2}} = 15,93 \text{mm}.$$

A rúd karcsúsága

$$\lambda = \frac{l_o}{i} = \frac{3000 \text{mm}}{15,93 \text{mm}} = 188,32.$$



84. ábra

Zárt szelvényű nyomott oszlop

Mivel $\lambda_p = 105 \leq \lambda = 188,32$ -nél, ezért a kihajlás rugalmas és használható az Euler-képlet.



8.8. Hajlítással párosult nyírás

Feladat:

Határozzuk meg a 85. ábrán látható I-tartó keresztmetszetét terhelő belső erőrendszer hatására a keresztmetszet A , B és S pontjában ébredő normál feszültségeket, valamint az 1-1, 2-2 ill. 3-3 szakasz mentén a nyírófeszültségeket és rajzoljuk meg a feszültségek eloszlását az y -tengely mentén, ha $M_{hx}=1 \text{ kNm}$, $T=50 \text{ kN}$.

Megoldás:

A keresztmetszet x -tengelyre számított másodrendű nyomatéka

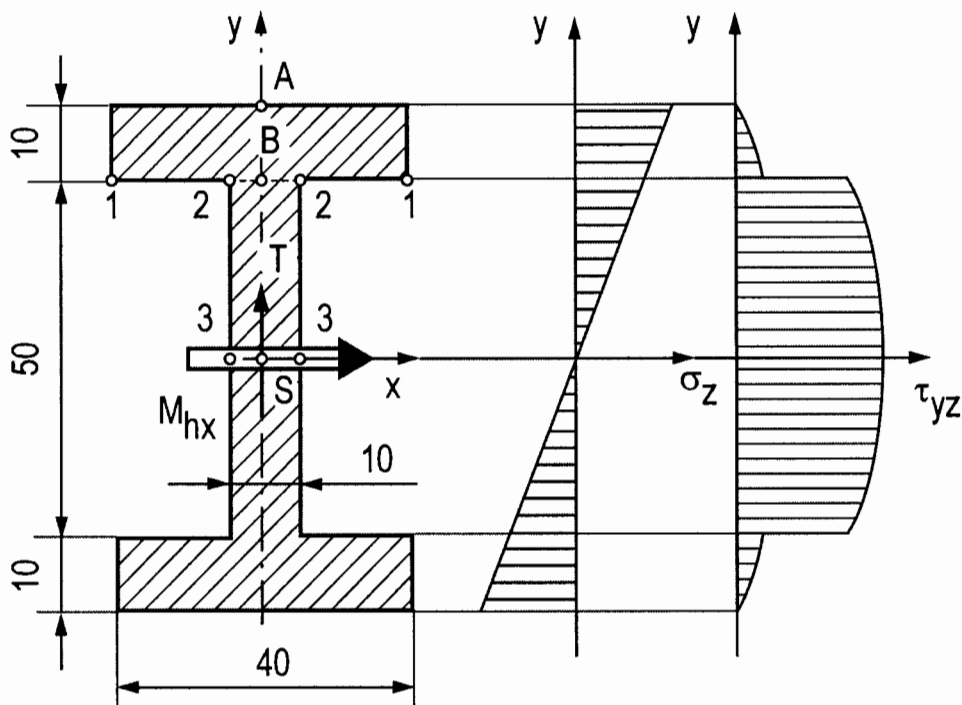
$$I_x = \frac{40\text{mm}(70\text{mm})^3}{12} - 2 \frac{15\text{mm}(50\text{mm})^3}{12} = \\ = 1,143 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 - 3,125 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 = 8,308 \cdot 10^5 \text{ mm}^4.$$

A hajlításból származó feszültségeket a Navier-képlettel számítjuk. Az A -pontban ébredő normál feszültség

$$\sigma_{zA} = \frac{M_{hx}}{I_x} y_A = \frac{1 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{8,308 \cdot 10^5 \text{ mm}^4} 35\text{mm} = 42,13 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 42,13 \text{ MPa}.$$

A B -pontban a normál feszültség

$$\sigma_{zB} = \frac{M_{hx}}{I_x} y_B = \frac{1 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{8,308 \cdot 10^5 \text{ mm}^4} 25\text{mm} = 30,09 \text{ MPa}.$$



85. ábra
Hajlításra és nyírásra igénybevett I-tartó

Az x súlyponti tengely a hajlítás tengelye, ezért e tengely mentén a hajlításból származó normál feszültség zérus. A normál feszültségek eloszlása az y -tengely mentén lineáris (85. ábra).

A nyírófeszültségek értéke az A ponton átmenő és az x -tengellyel párhuzamos egyenes mentén zérus. Az 1-1 egyenes mentén

$$S_{x(1-1)} = y_s A = 30 \text{ mm} (40 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm}) = 1,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$A_{(1-1)} = 40 \text{ mm},$$

$$\tau_{yz(1-1)} = \frac{TS_{x(1-1)}}{I_x a_{(1-1)}} = \frac{5 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 1,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^3}{8,308 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \cdot 40 \text{ mm}} = 18,05 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 18,05 \text{ MPa}.$$

$$S_{x(2-2)}=S_{x(1-1)}=1,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^3,$$

$$a_{(2-2)}=10 \text{ mm},$$

$$\tau_{yz(2-2)} = \frac{TS_{x(2-2)}}{I_x a_{(2-2)}} = \frac{5 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 1,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^3}{8,308 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \cdot 10 \text{ mm}} = 72,22 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 72,22 \text{ MPa}.$$

A nyírófeszültségek eloszlása a 3-3 egyenes mentén

$$S_{x(3-3)}=30\text{mm}(40\text{mm} \cdot 10\text{mm})+12,5\text{mm}(10\text{mm} \cdot 25\text{mm})=1,5125 \cdot 10^4 \text{ mm}^3,$$

$$a_{(3-3)}=10 \text{ mm},$$

$$\tau_{yz(3-3)} = \frac{TS_{x(3-3)}}{I_x a_{(3-3)}} = \frac{5 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 1,5125 \cdot 10^4 \text{ mm}^3}{8,308 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \cdot 10 \text{ mm}} = 91,03 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 91,03 \text{ MPa}.$$

A csúszató feszültségek eloszlását a 85. ábra mutatja.

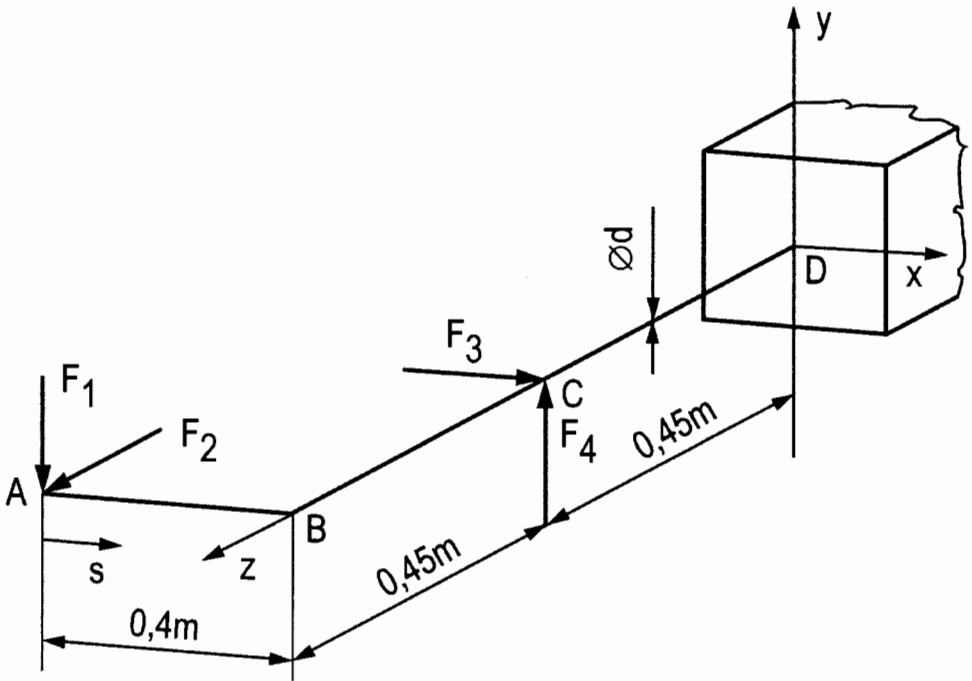
8.9. Törtvonalú tartó méretezése

Feladat:

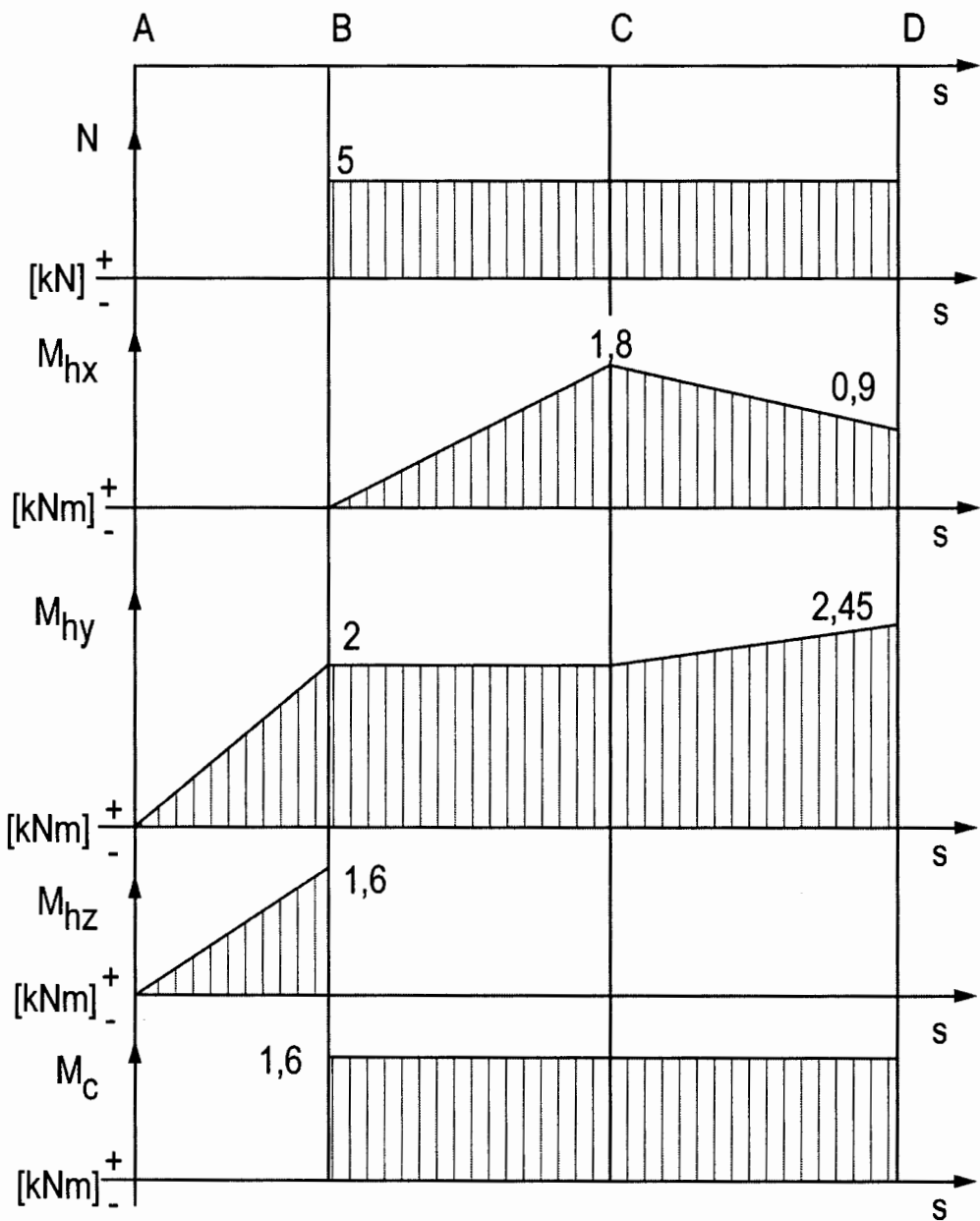
Ellenőrizzük a 86. ábrán látható körkeresztmetszetű tartót Huber-Mises-Hencky elmélet szerint. (A nyírást hanyagoljuk el!)

Adatok:

$$F_1=4 \text{ kN}; F_2=5 \text{ kN}; F_3=1 \text{ kN}; F_4=6 \text{ kN}; d=60 \text{ mm}; \sigma_{meg}=180 \text{ MPa}.$$



86. ábra
A törtvonalú tartó terhelése



87. ábra
A törtvonalú tartó igénybevételi ábrái

Megoldás:

A nyírás elhanyagolása következtében a tartó igénybevétele húzás, hajlítás és csavarás. A veszélyes keresztmetszet kiválasztása céljából megrajzoltuk az igénybevételi ábrákat (87. ábra), ahonnan látható, hogy a tartó veszélyes keresztmetszete a C keresztmetszet.

Az igénybevételek értéke:

– a húzóerő

$$N=5 \text{ kN},$$

– a hajlítónyomaték

$$\begin{aligned} M_h = M_{hmax} &= \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hy}^2} = \sqrt{(1,8 \text{ kNm})^2 + (2 \text{ kNm})^2} = \\ &= 2,69 \text{ kNm}, \end{aligned}$$

– a csavarónyomaték

$$M_c = 1,6 \text{ kNm}.$$

A tartó keresztmetszete és keresztmetszeti tényezője

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{(60 \text{ mm})^2 \pi}{4} = 2826 \text{ mm}^2$$

$$K_x = K_y = K = \frac{d^3 \pi}{32} = \frac{(60 \text{ mm})^3 \pi}{32} = 21195 \text{ mm}^3.$$

A húzásból és hajlításból egyirányú összetett igénybevételek származnak, ezért a húzó és hajlító feszültségek algebrailag összegezhetőek. A húzásból származó feszültség

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{5000N}{2826\text{mm}^2} = 1,77 \frac{N}{\text{mm}^2} = 1,77\text{MPa},$$

a hajlításból származó feszültség

$$\sigma_h = \frac{M_{hmax}}{K} = \frac{2,69 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{21195\text{mm}^3} = 126,92 \frac{N}{\text{mm}^2} = 126,92\text{MPa}.$$

A maximális normál feszültség

$$\sigma_{max} = \sigma_N + \sigma_h = 1,77\text{MPa} + 126,92\text{MPa} = 128,68\text{MPa}.$$

A csavarásból származó maximális csúsztató feszültség

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \frac{M_c}{K_p} = \frac{M_c}{2K} = \frac{1,6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{2 \cdot 21195\text{mm}^3} = 37,74 \frac{N}{\text{mm}^2} = \\ &= 37,74\text{MPa}. \end{aligned}$$

A redukált feszültség

$$\begin{aligned} \sigma_{red} &= \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} = \sqrt{(128,68\text{MPa})^2 + 3(37,74\text{MPa})^2} = \\ &= 144,33\text{MPa} \leq \sigma_{meg} = 180\text{MPa}, \end{aligned}$$

tehát a tartó **megfelel**.

8.10. Tárcsás tengely méretezése

Feladat:

Számítsuk ki a 88. ábrán látható tengely szükséges átmérőjét Mohr-elmélet szerint. A nyírást hanyagoljuk el!

Adatok:

$$l_1=100 \text{ mm}; l_2=150 \text{ mm}; l_3=80 \text{ mm}; d_1=100 \text{ mm}; d_2=200 \text{ mm}; F_1=9 \text{ kN}; \\ \sigma_{meg}=140 \text{ MPa}.$$

Megoldás:

A tengelyre ható csavaró nyomaték

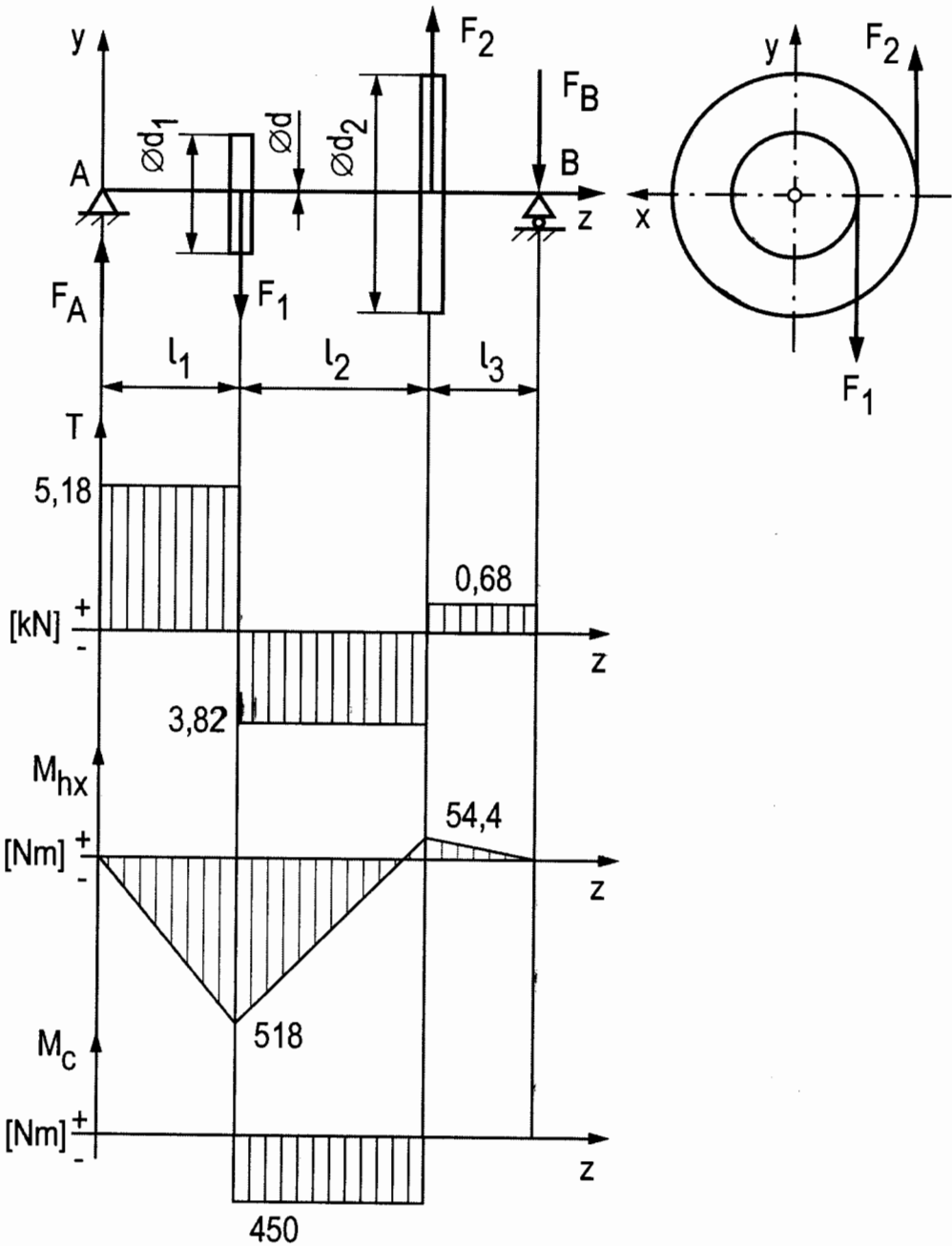
$$M_c = F_1 \frac{d_1}{2} = 9 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 0,05 \text{ m} = 450 \text{ Nm}.$$

Az F_2 erőt a csavaró nyomatékok egyensúlyából tudjuk meghatározni

$$\Sigma M_{ci} = 0 = M_c - F_2 \frac{d_2}{2},$$

innen

$$F_2 = \frac{M_c}{d_2/2} = \frac{450 \text{ Nm}}{0,1 \text{ m}} = 4,5 \text{ kN}.$$



88. ábra
A tárcsás tengely terhelése

A támasztó erők meghatározása céljából először nyomatéki egyenletet írunk fel az A ponton átmenő tengelyre

$$\sum M_i^{(A)} = 0 = F_1 \cdot 0,1m - F_2 \cdot 0,25m + F_B \cdot 0,33m,$$

$$F_B = \frac{4500kN \cdot 0,25m - 9500kN \cdot 0,1m}{0,33m} = 681,8N.$$

Az F_B erőt az y irányú egyensúlyi egyenletből határozzuk meg

$$\sum F_{iy} = 0 = F_A - F_1 + F_2 - F_B,$$

$$F_A = F_1 - F_2 + F_B = 9000N - 4500N + 681,8N = 5181,8N.$$

Az igénybevételi ábrák alapján látható, hogy a tartó veszélyes keresztmetszete a d_1 átmérőjű keréknél van. Ebben a keresztmetszetben a tengely igénybevétele (a nyírás elhanyagolásával)

- hajlítás és
- csavarás.

A feszültségek eloszlását a keresztmetszet y tengelye mentén a 89. ábra mutatja. Az ábráról látható, hogy a keresztmetszet veszélyes pontja az A és B pont. A keresztmetszet C pontjában csavarásból τ_{max} és nyírásból τ_{yz} feszültség ébred, melyek egyirányú összetett igénybevételt jelentenek és e pont feszültségi állapotát is ellenőrizni lehet.

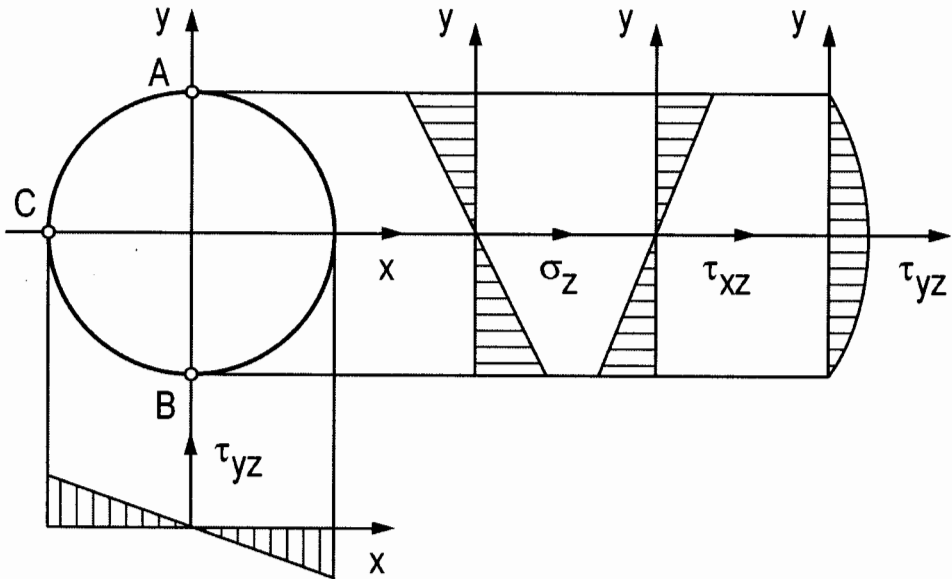
A hajlításból származó maximális normál feszültség

$$\sigma_{zmax} = \frac{M_{hx}}{K_x},$$

a csavarásból származó maximális nyírófeszültség

$$\tau_{c\max} = \frac{M_c}{K_p} = \frac{M_c}{2K_x}$$

$$K_x = \frac{d^3 \pi}{32}$$



89. ábra

A tengely veszélyes keresztmetszetében a feszültségek eloszlása

A redukált feszültség

$$\begin{aligned} \sigma_{red} &= \sqrt{\sigma_{z\max}^2 + 4\tau_{c\max}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_c}{2K_x}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{K_x} \sqrt{M_{hx}^2 + M_c^2} = \frac{1}{K_x} M_{red} = \sigma_{meg}. \end{aligned}$$

A redukált nyomaték értéke

$$M_{red} = \sqrt{M_{hx}^2 + M_c^2} = \sqrt{(518Nm)^2 + (450Nm)^2} = 686,2Nm.$$

és az átmérő

$$\begin{aligned} d &= \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\pi\sigma_{meg}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 686,2Nm}{3,14 \cdot 140 \cdot 10^6 N/m^2}} = \\ &= \sqrt[3]{49,951 \cdot 10^{-6} m^3} = 0,0368m = 36,8mm. \end{aligned}$$

A kapott értéket a következő nagyobb szabványos átmérőre kell kerekíteni ($d=40mm$).

Megjegyzés:

Az M_{red} értékében a hajlító és csavaró nyomatékokat Pitagorasz tétel szerint csak kör vagy körgyűrű keresztmetszet esetén és csak Mohr-elmélet szerint számított redukált feszültségnél szabad összegezni.

8.11. Belső energia számítása

Feladat:

A 90. ábrán egy állandó, kör keresztmetszetű rúd igénybevételi ábrái láthatók. Számítsuk ki a rúdban felhalmozódott belső energiát!

Adatok:

$$N=40 \text{ kN}; M_o=60 \text{ kNm}; M_c=50 \text{ kNm}; d=180 \text{ mm}; l_1=2000 \text{ mm}; l_2=3000 \text{ mm}; \\ E=200 \text{ GPa}; G=80 \text{ GPa}.$$

Megoldás:

A tartó keresztmetszete és másodrendű nyomatékai

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{(180 \text{ mm})^2 \pi}{4} = 2,543 \cdot 10^4 \text{ mm}^2,$$

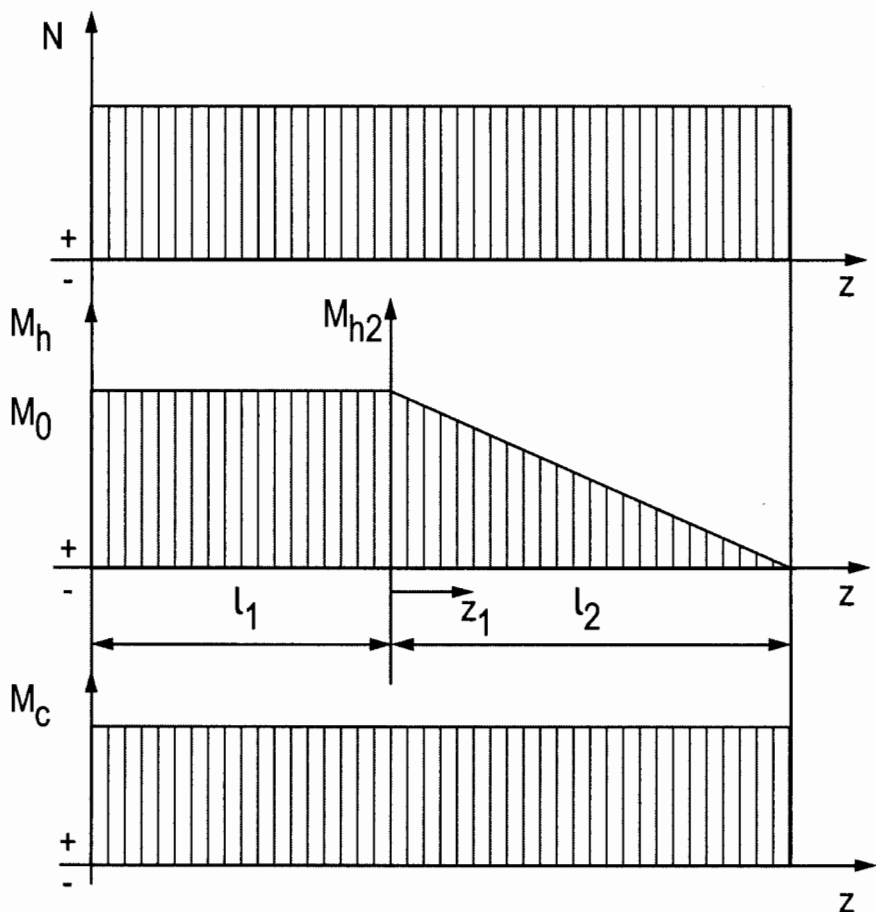
$$I_x = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{(180 \text{ mm})^4 \pi}{64} = 5,150 \cdot 10^7 \text{ mm}^4,$$

$$I_p = 1,03 \cdot 10^8 \text{ mm}^4.$$

A rúdban felhalmozott belső energia a normálerőből (U_N), a hajlító nyomatékból (U_{M_h}) és a csavaró nyomatékból (U_{M_c}) származik.

A normálerőből származó belső energia

$$U_N = \frac{N^2(l_1 + l_2)}{2AE} = \frac{(4 \cdot 10^4 \text{ N})^2 5 \cdot 10^3 \text{ mm}}{2 \cdot 2,543 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2} = \\ = \frac{8,0 \cdot 10^{12} \text{ N}^2 \text{ mm}}{1,017 \cdot 10^{10} \text{ N}} = 788,6 \text{ Nmm} = 0,786 \text{ Nm}.$$



90. ábra
A rúd igénybevételi ábrái

A hajlításból származó belső energiát külön számítjuk az l_1 ill. l_2 szakaszon.

$$\begin{aligned}
 U_{Mh_1} &= \frac{M_o^2 l_1}{2I_x E} = \frac{(6 \cdot 10^7 \text{ Nmm})^2 \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ mm}}{2 \cdot 5,15 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2} = \\
 &= \frac{7,2 \cdot 10^{18} \text{ N}^2 \text{ mm}^3}{2,06 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2} = 3,495 \cdot 10^5 \text{ Nmm} = 349,5 \text{ Nm}.
 \end{aligned}$$

Az l_2 szakaszon a hajlító nyomaték meghatározása céljából fel kell írni a nyomaték egyenletét az $M_{h_2-z_1}$ koordináta rendszerben

$$M_{h_2} = -\frac{M_o}{l_2} z_1 + M_o,$$

$$\begin{aligned} U_{M_{h_2}} &= \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \frac{M_{h_2}^2}{I_x E} dz_1 = \frac{1}{2 I_x E} \int_0^{l_2} \left(-\frac{M_o}{l_2} z_1 + M_o \right)^2 dz_1 = \\ &= \frac{1}{2 I_x E} \int_0^{l_2} \left(\frac{M_o^2}{l_2^2} z_1^2 - \frac{2M_o^2}{l_2} z_1 + M_o^2 \right) dz_1 = \\ &= \frac{1}{2 I_x E} \left\{ \frac{M_o^2}{l_2^2} \left[\frac{z_1^3}{3} \right]_0^{l_2} - \frac{2M_o^2}{l_2} \left[\frac{z_1^2}{2} \right]_0^{l_2} + M_o^2 [z_1]_0^{l_2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2 I_x E} \left(\frac{M_o^2 l_2}{3} - M_o^2 l_2 + M_o^2 l_2 \right) = \frac{M_o^2 l_2}{6 I_x E} = \\ &= \frac{(6 \cdot 10^7 \text{ Nmm})^2 \cdot 3 \cdot 10^3 \text{ mm}}{6 \cdot 5,15 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2} = \frac{1,08 \cdot 10^{19} \text{ Nmm}^3}{6,18 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2} = \\ &= 1,748 \cdot 10^5 \text{ Nmm} = 174,8 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

A csavarásból származó belső energia

$$\begin{aligned} U_{M_c} &= \frac{M_c^2 (l_1 + l_2)}{2 I_p G} = \frac{(5 \cdot 10^7 \text{ Nmm})^2 \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ mm}}{2 \cdot 1,03 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \cdot 8 \cdot 10^4 \text{ Nmm}^2} = \\ &= \frac{1,25 \cdot 10^{19} \text{ N}^2 \text{ mm}^3}{1,648 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2} = 7,585 \cdot 10^5 \text{ Nmm} = 758,5 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

A rúdban felhalmozott összes belső energia

$$\begin{aligned} U &= U_N + U_{M_{h_1}} + U_{M_{h_2}} + U_{M_c} = \\ &= 0,786 \text{ Nm} + 349,5 \text{ Nm} + 174,8 \text{ Nm} + 758,5 \text{ Nm} = 1283,6 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

8.12. Statikailag határozatlan keretszerkezet méretezése

Feladat:

Határozzuk meg a 91. ábrán látható állandó keresztmetszetű statikailag határozatlan síkbeli keretszerkezet támasztó erőit. A normál erőkből és a nyírásból származó belső energiát hanyagoljuk el! $F_1=4\text{ kN}$; $F_2=2\text{ kN}$; IE állandó.

Megoldás:

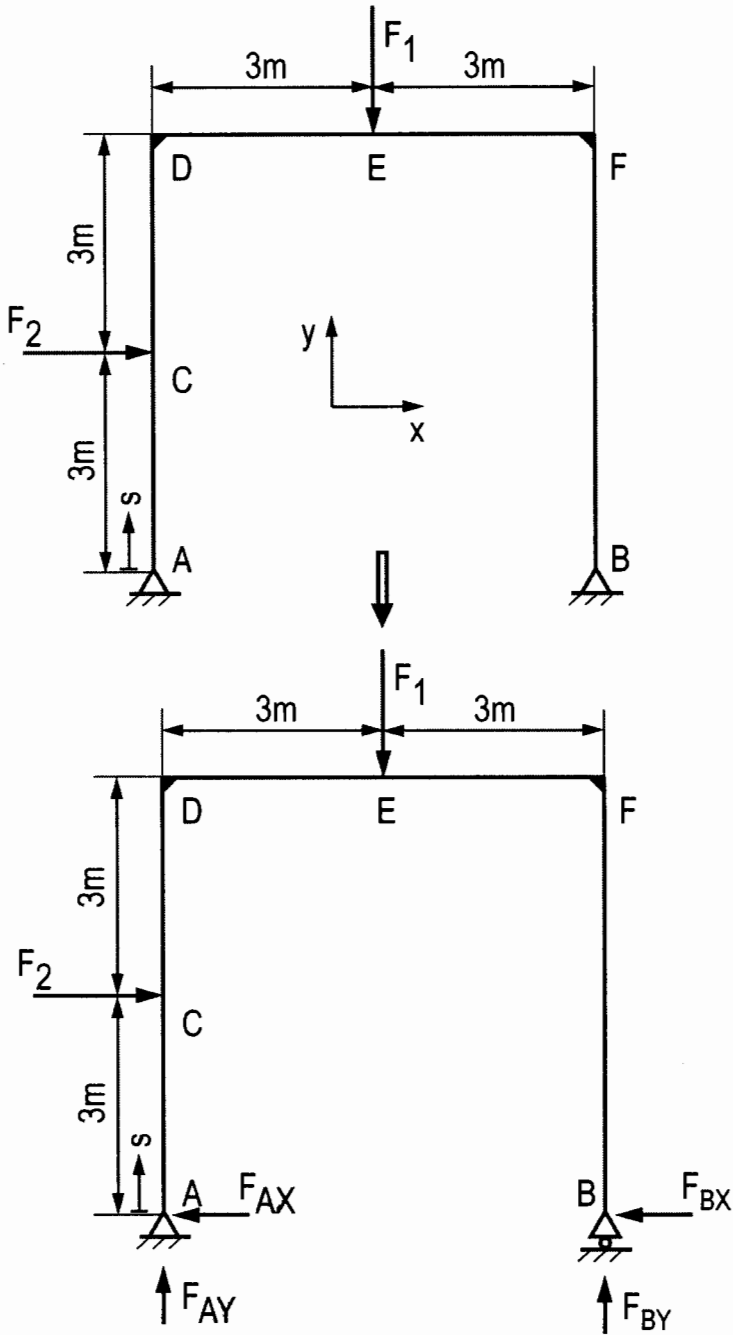
Az A és B pontban a megtámasztásnál ismeretlen a támasztó erők x - és y - irányú komponense, tehát 4 ismeretlenes feladattal állunk szemben. A statikában tanultak szerint 3 független egyenletet lehet felírni, ezért a feladat 1-szeresen statikailag határozatlan. A feladatot úgy tesszük statikailag határozottá, hogy a B pontban csuklós megtámasztást alakítunk ki. Ezáltal azonban a szerkezet x -irányban elmozdulhat. Ennek megakadályozása érdekében működtetni kell az F_{BX} erőt, ami megakadályozza az x -irányú elmozdulást, vagyis teljesülni kell az $x_B=0$ egyenletnek. Így a három statikai egyenlet mellett rendelkezésre áll a szükséges negyedik egyenlet. A felírható egyenletek az alábbiak:

$$1) \sum F_{ix} = 0 = F_2 - F_{AX} - F_{BX},$$

$$2) \sum F_{iy} = 0 = F_{AY} - F_1 + F_{BY},$$

$$3) \sum M_i^{(A)} = 0 = 3F_2 + 3F_1 - 6F_{BY},$$

$$4) x_B = 0 = \frac{\partial U}{\partial F_{BX}} = \frac{1}{IE} \int_0^l M(s) \frac{\partial M(s)}{\partial F_{BX}} ds.$$



91. ábra
A keretszerkezet terhelése

A 3-as egyenletből az F_{BY} meghatározható

$$F_{BY} = \frac{2kN \cdot 3m + 4kN \cdot 3m}{6m} = 3kN(\uparrow).$$

A 2-es egyenletből

$$F_{AY} = F_1 - F_{BY} = 4kN - 3kN = 1kN(\uparrow).$$

Az 1-es egyenletben két ismeretlen szerepel, ezért ebből kifejezzük az F_{AX} -et

$$F_{AX} = F_2 - F_{BX},$$

amit majd a 4-es egyenletbe helyettesítünk. A belső energia számításához felírjuk a keretszerkezet egyes szakaszain érvényes nyomaték függvényeket az s távolság függvényében

AC szakasz

$$M_{AC} = -F_{AX}s = -F_2s + F_{BX}s = -2s + F_{BX}s$$

és deriváltja

$$\frac{\partial M_{AC}}{\partial F_{BX}} = s,$$

CD szakasz

$$\begin{aligned} M_{CD} &= -F_{AX}s + F_2(s-3) = -F_2s + F_{BX}s + 2s - 6 = \\ &= -6 + F_{BX}s \end{aligned}$$

és deriváltja

$$\frac{\partial M_{CD}}{\partial F_{BX}} = s,$$

DE szakasz

$$M_{DE} = -6F_{AX} - F_{AY}s + 3F_2 = -12 + 6F_{BX} - s + 6 = -6 + 6F_{BX} - s$$

és deriváltja

$$\frac{\partial M_{DE}}{\partial F_{BY}} = 6,$$

EF szakasz

$$\begin{aligned} M_{EF} &= -F_{AY}s - 6F_{AX} + 3F_2 + F_1(s-3) = \\ &= -s - 6F_2 + 6F_{BX} + 3F_2 + F_1s - 3F_1 = -18 + 3s + 6F_{BX} \end{aligned}$$

és deriváltja

$$\frac{\partial M_{EF}}{\partial F_{BX}} = 6,$$

FB szakasz

$$\begin{aligned} M_{FB} &= -6F_{AY} - F_{AX}(6-s) + F_2(3-s) + 3F_1 = \\ &= -6 - 6F_2 + 6F_{BX} + F_2s - F_{BX}s + 3F_2 - F_2s + 3F_1 = \\ &= 6F_{BX} - F_{BX}s \end{aligned}$$

és deriváltja

$$\frac{\partial M_{FB}}{\partial F_{BX}} = 6 - s,$$

A 4-es egyenletbe helyettesítés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x_B = 0 &= \frac{1}{IE} \left[\int_0^3 (-2s + F_{BX} s) s ds + \int_3^6 (-6 + F_{BX} s) s ds + \right. \\ &+ \int_0^3 (-6 + 6F_{BX} - s) 6 ds + \int_3^6 (-18 + 3s + 6F_{BX}) 6 ds + \\ &+ \int_0^6 (6F_{BX} - F_{BX} s)(6 - s) ds \left. \right] = \frac{1}{IE} \left\{ -2 \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^3 + F_{BX} \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^3 - \right. \\ &- 6 \left[\frac{s^2}{2} \right]_3^6 + F_{BX} \left[\frac{s^3}{3} \right]_3^6 - 36 [s]_0^3 + 36 F_{BX} [s]_0^3 - 6 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^3 - \\ &- 108 [s]_3^6 + 18 \left[\frac{s^2}{2} \right]_3^6 + 36 F_{BX} [s]_3^6 + 36 F_{BX} [s]_0^6 - \\ &\left. - 6 F_{BX} \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^6 - 6 F_{BX} \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^6 + F_{BX} \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^6 \right\} = \\ &= \frac{1}{IE} (-18 + 9F_{BX} - 81 + 63F_{BX} - 135 + 108F_{BX} - 81 + 108F_{BX} + 72F_{BX}) = \\ &= \frac{1}{IE} (-315 + 360F_{BX}), \end{aligned}$$

innen

$$F_{BX} = \frac{315}{360} = 0,875 \text{ kN}.$$

Az 1-es egyenletből adódik, hogy

$$F_{AX} = F_2 - F_{BX} = 2 \text{ kN} - 0,875 \text{ kN} = 1,125 \text{ kN}.$$

8.13. Vastag falú cső

Feladat:

Egy 50 mm belső átmérőjű acélcső anyagára megengedett feszültség 200 MPa. A csövet $p_b=110$ MPa belső és $p_k=30$ MPa külső nyomás terheli. A cső végei zártak és hosszirányban szabadon elmozdulhatnak. Mekkora a cső külső átmérője?

Adatok:

$$E=200 \text{ GPa}; \nu=0,3.$$

Megoldás:

A redukált feszültség Mohr elmélete szerint

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{tb} - \sigma_{rb} = \frac{p_b(r_k^2 + r_b^2) - 2p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} + p_b =$$
$$\frac{2r_k^2(p_b - p_k)}{r_k^2 - r_b^2} = \sigma_{meg}.$$

Rendezés után

$$2r_k^2(p_b - p_k) = \sigma_{meg}(r_k^2 - r_b^2).$$

Átalakítás után

$$\sigma_{meg} r_b^2 = r_k^2 [\sigma_{meg} - 2(p_b - p_k)],$$

innen

$$\begin{aligned}
 r_k &= r_b \sqrt{\frac{\sigma_{meg}}{\sigma_{meg} - 2(p_b - p_k)}} = \\
 &= 25\text{mm} \sqrt{\frac{200\text{N/mm}^2}{200\text{N/mm}^2 - 2(110\text{N/mm}^2 - 30\text{N/mm}^2)}} = \\
 &= 25\text{mm} \sqrt{\frac{200\text{N/mm}^2}{40\text{N/mm}^2}} = 55,9\text{mm}.
 \end{aligned}$$

A cső külső átmérője

$$d = 2r_k = 111,8 \text{ mm}.$$

Amennyiben

$$p_b - p_k = \frac{\sigma_{meg}}{2},$$

akkor a cső sugara végtelenre adódik. Emiatt az adott anyagú csőnél csak $\sigma_{meg}/2$ -nél kisebb nyomáskülönbség engedhető meg. Ha a csőnek ennél nagyobb nyomást kell kibírnia, akkor az ilyen csövet pl. több részből, – a zsigorkötésekhez hasonlóan – átfedéssel kell elkészíteni.

A csőfalban kialakult feszültségállapot ábrázolása céljából meghatározzuk a cső belső és külső falán a tangenciális feszültség értékét.

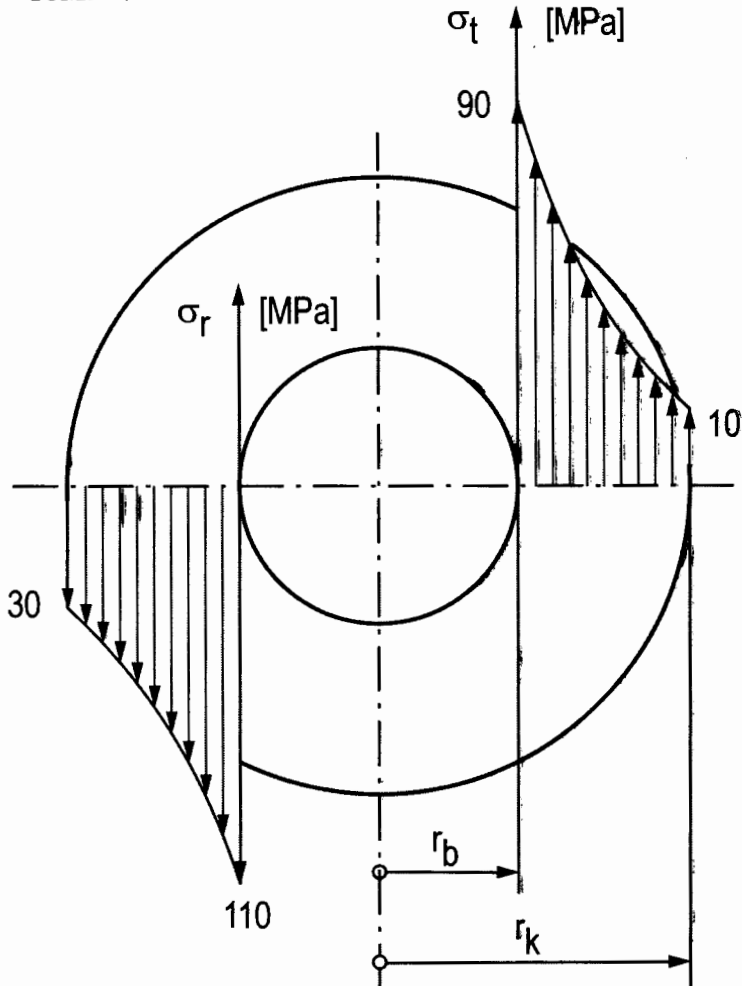
$$\begin{aligned}
 \sigma_{ib} &= \frac{p_b(r_k^2 + r_b^2) - 2p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} = \\
 &= \frac{110\text{N/mm}^2 [(55,9\text{mm})^2 + (25\text{mm})^2] - 2 \cdot 30\text{N/mm}^2 (55,9\text{mm})^2}{(55,9\text{mm})^2 - (25\text{mm})^2} = \\
 &= \frac{224990,5\text{N}}{2499,81\text{mm}^2} = 90\text{N/mm}^2 = 90\text{MPa}
 \end{aligned}$$

és

$$\sigma_{ik} = \frac{2p_b r_b^2 - p_k(r_k^2 + r_b^2)}{r_k^2 - r_b^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 110 \text{ N/mm}^2 (25)^2 - 30 \text{ N/mm}^2 [(55,9 \text{ mm})^2 + (25 \text{ mm})^2]}{(55,9 \text{ mm})^2 - (25 \text{ mm})^2} =$$

$$= 10 \text{ MPa.}$$



92. ábra

A vastag falú csőben ébredő feszültségek

A tangenciális és radiális feszültségek eloszlását a csőfalban a 92. ábra mutatja.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] M. Csizmadia Béla – Nándori Ernő: Mechanika mérnököknek.
Szilárdságtan. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [2] Szilárdságtan I. Nehézipari Műszaki Egyetem, Mechanikai Tanszék.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- [3] Muttnyánszky Ádám: Szilárdságtan. Műszaki Könyvkiadó, Budapest,
1981.
- [4] Selmeczi Ferenc: Mechanika I. Szilárdságtan. Műszaki Könyvkiadó,
Budapest, 1975.

TÁRGYMUTATÓ

A

- alaktényező ▪ 37
- alakváltozási állapot ▪ 21
- alakváltozási munka ▪ 97, 114
- alakváltozási tenzor ▪ 24
- alsó folyáshatár ▪ 26
- anyagmodellek ▪ 29, 30
- arányossági
 - határ ▪ 26, 71, 76, 77
 - szakasz ▪ 27
- autofrettage ▪ 147

B

- belső energia ▪ 115, 116, 128
- Bernoulli-Navier féle feltételezések ▪ 48
- Betti-tétele ▪ 119
- biztonsági tényező ▪ 30, 77
- Bredt-féle képlet ▪ 69

C

- Castigliano-tétele ▪ 125, 127, 132
 - alkalmazása ▪ 128
- csavarás ▪ 63, 68, 79, 93, 98, 101, 118
- csavarási merevség ▪ 68, 119
- csúsztató feszültségek ▪ 66, 108, 116
 - dualitása ▪ 11, 13
- csúsztató rugalmassági modulusz ▪ 45, 119
- csúsztatófeszültségek ▪ 11, 70, 136

D

diagram

- stabilitási ▪ 76
- szakító ▪ 24, 26, 28, 45

E

- egyenes hajlítás ▪ 47
- egyenszilárdságú húzott rúd ▪ 39
- egyenszilárdságú rúd ▪ 39, 58
- egyezményes folyáshatár ▪ 29
- ellenőrzés ▪ 67, 79, 93, 103, 143
- érintőirányú fajlagos nyúlás ▪ 136
- Euler ▪ 74
 - hiperbola ▪ 76, 77
 - képlet ▪ 74, 76
 - típusú homogén másodrendű differenciálegyenlet megoldása ▪ 138

F

- fajlagos nyúlás ▪ 23, 25, 27, 42, 49, 115, 136
- felkeményedés szakasza ▪ 27
- felső folyáshatár ▪ 26
- ferde hajlítás ▪ 79, 88, 89
- feszültség ▪ 8, 19, 26, 30
 - csúsztató ▪ 11, 70, 136
 - fő ▪ 15, 98, 99, 136
 - hőmérsékletváltozás okozta ▪ 42
 - megengedett ▪ 29, 39, 58, 71, 79, 103, 146
 - normál ▪ 9, 11, 51, 81, 102, 104, 107, 115
 - nyíró ▪ 43, 99
 - radiális ▪ 138, 140, 141, 144
 - redukált ▪ 93, 95, 100, 103, 143, 146
 - sugárirányú ▪ 136, 140
 - tangenciális ▪ 142, 143, 145, 146
 - tengelyirányú ▪ 136
 - törő ▪ 75

feszültségcsúc ■ 37, 93

feszültségi

állapot ■ 8, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 33, 68, 94, 103

állapot Mohr-féle ábrázolása ■ 15

ellipszoid ■ 15

határgörbe ■ 94, 95

feszültségtenzor ■ 15

feszültségvektor ■ 9, 10, 13

nagysága ■ 19

folyáshatár ■ 26

alsó ■ 26

egyezményes ■ 29

felső ■ 26

folyási szakasz ■ 27

főfeszültségek ■ 15, 98, 99, 136

főirány ■ 19, 20, 24, 88

G

görbületi sugár ■ 53

H

hajlítás tengelye ■ 47, 81, 92

hajlítási merevség ■ 118

hajlítással párosult nyírás ■ 104, 106, 109

hajlító igénybevétel ■ 46

homogén ■ 7, 135

Hooke-törvény ■ 27, 37, 45, 136

egyszerű ■ 49, 65

nyírásra vonatkozó ■ 45

hőmérsékletváltozás okozta feszültség ■ 42

Huber-Mises-Hencky elmélet ■ 96, 100

I

ideálisan rugalmas ▪ 113
idegen munka ▪ 120
izotróp ▪ 7, 135

K

karcsúság ▪ 75
képlet
 Bredt-féle ▪ 69
 Euler-féle ▪ 74, 76
 Navier ▪ 51, 58, 90, 107
képlékeny szakasz ▪ 27
keresztirányú fajlagos nyúlás ▪ 28
keresztmetszet-változás okozta feszültségeloszlás ▪ 37, 38
korrekciós tényező ▪ 95
központos húzás ▪ 33
kritikus erő ▪ 71

M

magidom ▪ 84, 85, 86, 87, 88
maradó alakváltozás ▪ 26, 94, 147
Maxwell-féle felcserélhetőségi tétel ▪ 130
megengedett feszültség ▪ 29, 39, 58, 71, 79, 103, 146
megnyúlás ▪ 25, 37, 41
méretezés ▪ 29, 77, 79, 96, 101
Mohr-elmélet ▪ 94
modulusz
 csúsztató rugalmassági ▪ 45, 119
 rugalmassági ▪ 7, 27
 Young-féle ▪ 27

N

Navier-képlet ▪ 51, 58, 90, 107
normálfeszültség ▪ 9, 11, 51, 81, 102, 104, 107, 115
nyírás ▪ 43, 44, 60, 79, 93, 99, 115
nyírófeszültség ▪ 43, 99
nyírt szegecskötés ▪ 46

O

összetett igénybevételek
 egyirányú ▪ 79
 többirányú ▪ 93, 99, 100

P

palástnyomás ▪ 41, 42
Poisson
 szám ▪ 28, 45
 tényező ▪ 28, 45

R

radiális feszültség ▪ 138, 140, 141, 144
redukált
 feszültség ▪ 93, 95, 100, 103, 143, 146
 nyomaték ▪ 104
rugalmas
 szakasz ▪ 27
 szál differenciálegyenlete ▪ 53
 test ▪ 113, 120, 125
 vonal ▪ 47, 56
rugalmassági
 határ ▪ 26
 modulusz ▪ 7, 27

S

Saint-Venant-elv ▪ 31

szakasz

arányossági ▪ 27

felkeményedés ▪ 27

folyási ▪ 27

képlékeny ▪ 27

redukált ▪ 27

semleges szál ▪ 47, 52, 84

görbületi sugara ▪ 49

semleges tengely ▪ 81, 92

síkbeli feszültségi állapot ▪ 18

stabilitási diagram ▪ 76

statikailag határozatlan ▪ 132, 133

sugárirányú feszültség ▪ 136, 140

szakítódiaagram ▪ 24, 26, 28, 45

szakítószilárdság ▪ 26, 95

szélső szál ▪ 51, 58, 85, 87

szilárd test ▪ 7

szögtorzulás ▪ 45, 65, 116, 118

T

tangenciális feszültség ▪ 142, 143, 145, 146

tengelyirányú feszültség ▪ 136

térfogatváltozási munka ▪ 97

terhelés síkja ▪ 47, 89

Tetmajer-egyenes ▪ 77

tiszta csavarás ▪ 63

tiszta nyírás ▪ 43, 44, 68, 98

torzulási munka ▪ 97

törőerő ▪ 71, 74

törőfeszültség ▪ 75

V

változó keresztmetszetű rúd ▪ 39, 58

vastag falú cső ▪ 137, 147

veszélyes keresztmetszet ▪ 102

Y

Young-féle modulusz ▪ 27